南开大学数学教学丛书

拓扑学基础

林金坤 编



科学出版社

南开大学数学教学丛书

拓 扑 学 基 础

林金坤 编

科 学 出 版 社

1 9 9 8

内 容 简 介

本书主要内容包括:拓扑空间理论;单纯复形和多面体;基本群;同调群.每节后都附有一定量的习题.本书作为南开大学教学用书多年.

读者范围:高校数学系学生、教师.

图书在版编目(CIP)数据
拓扑学基础/林金坤编. -北京:科学出版社,1998
(南开大学数学教学丛书)
ISBN 7-03-006380-5
Ⅰ.拓… Ⅱ.林… Ⅲ.拓扑 Ⅳ.O189
中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 24189 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
新蕾印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1998年6月第 一 版 开本:850×1168 1/32
1998年6月第一次印刷 印张:5 3/4
印数:1—2 800 字数:150 000

定价: 9.60 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(新欣))

序

海内外华夏炎黄子孙都盼望中国早日成为数学大国，也就是"实现中国数学的平等和独立"[1]. 平等和独立是由中国出类拔萃的数学家及其杰出的研究工作来体现的，要有出类拔萃的数学家就要培养一批优秀的研究生、大学生. 这批人不在多，而在精，要层次高. 也就是要求他们热爱数学、基础扎实、知识面广、能力强.

80 年代中期，国家采纳了陈省身先生的几个建议. 建议之一是为培养高质量的数学专业的大学生，需要建立数学专业的试点班. 经过胡国定先生等的努力，1986 年在南开大学建立了数学专业的试点班. 这些作法取得了成功，并在基础学科的教学中有了推广. 1990 年在全国建立"国家理科基础学科研究和教学人才培养基地". 其后南开大学数学专业成为基地之一. 从 1986 年到现在的 10 余年中南开数学专业是有成绩的，例如他们四次参加全国大学生数学竞赛获三次团体第一，一次团体第三. 在全国和国际大学生数学建模比赛中多次获一等奖. 毕业生中的百分之八十继续攻读研究生，其中许多人取得了很好的成绩.

当然，取得这些成绩是与陈省身先生的指导、帮助分不开，是与国内外同行们的支持与帮助分不开的. 如杨忠道，王叔平，许以超，虞言林，李克正等或参与教学计划、课程设置、课程内容的制订，或到南开任教等等. 有了这些指导、帮助与支持，南开基础数学专业得以广泛吸收国内外先进的数学教学经验，并以此为基础对数学教学进行了许多改革、创新.

这套丛书是南开大学数学专业的部分教材，编著者们长期在南开数学专业任教，不断地把自己的心得体会揉和到基础知识和

---

〔1〕 陈省身：《在"二十一世纪中国数学展望"学术讨论会开幕式上的讲话》

基本理论的讲述中去，日积月累地形成了这套教材. 所以可以说这些教材不是“编”出来的，而是在长期教学中“教”出来的，“改”出来的，凝聚了我们的一点心血. 这些教材的共同点，也是我们教学所遵循的共同点是：首先要加强基础知识、基础理论和基本方法的教学；同时又要适当地开拓知识面，尤其注意反映学科前沿的成就、观点和方法；教学的目的是丰富学生的知识与提高学生的能力，因此配置的习题中多数是为了巩固知识和训练基本方法，也有一些习题是为训练学生解题技巧与钻研数学的能力.

我们要感谢中国科学出版社主动提出将这套教材出版. 这对编著者是件大好事. 编著者虽然尽了很大努力，但一则由于编著者的水平所限，二则数学的教育和所有学科的教育一样是在不断发展之中，因此这套教材中缺欠和不足肯定存在. 我们诚挚希望各位同行不吝指正，从而使编著者更明确了解教材及教学中的短长，进而扬长避短，改进我们的教学. 同时通过这套教材也可向同行们介绍南开的教学经验以供他们参考，或许有益于他们的工作.

我们再次感谢帮助过南开的前辈、同行们，同时也希望能继续得到他们和各位同行的帮助. 办好南开的数学专业，办好所有学校的数学专业，把中国数学搞上去，使中国成为数学大国是我们的共同愿望！这个愿望一定能实现！

编著者

于南开大学

1998 年 6 月

目　录

绪　论

拓扑学 是由英文 Topology 音译而来，这是起源于希腊文的名词，原意地志学．　1847 年首次由高斯 (Gauss) 的学生 Listing 引进．在此之前，数学家称拓扑学为位置分析 (Analysis situs)，这表明它研究的是根据分析的需要而提出的一些几何问题．拓扑学是近代发展起来高度抽象的一门几何学．根据德国数学家 Klein 提出的、史称爱尔朗根纲领 (Erlangen) 的思想，各种几何学可按照变换群进行分类，即几何学是研究空间 (或图形) 在某种变换下的不变性质．例如，欧氏几何是研究刚体运动下的不变性质，仿射几何是研究仿射变换下的不变性质 (仿射性质)，等等．

拓扑学研究空间在拓扑变换 (或同胚) 下的不变量或不变性质．所谓同胚的空间 X 与 Y 是指 X 与 Y 之间存在双向连续的 (即互逆且连续) 对应，形象的说就是橡皮泥 X 在不允许隔断的情况下可以捏成 Y．拓扑学中同胚的两个空间 X 与 Y 可不加区别，因此俗称 *橡皮几何学*．

从历史发展的观点来看，拓扑学起源于 19 世纪中叶以前一些孤立问题的研究．早在 17 世纪 Euler 发现了闭多面体的顶点个数 d，棱的个数 e，面的个数 v 存在一个关系：$v-e+d=2$．Euler 当时并不知道，2 是 (二维) 球面的拓扑不变量，即后来的 Euler-Poincaré 示性数．　18—19 世纪，数学家研究了地图着色问题，即平面 (或球面) 上的地图着几种颜色才能使每相邻国家有不同颜色．这个问题到 1890 年才证明了用五个颜色是可以的，并提出了四个颜色也可以的猜想，即著名的四色问题．球面的色数是和球面的 Poincaré 示性数有关联的．此外，Jordan

曲线定理：平面上简单闭曲线将平面分成两部分，高斯研究扭结和二重积分的联系等等是当时研究的一些孤立问题，而后成为拓扑学的有关问题.

拓扑学历史发展的转折点应归功于 Riemann 关于闭曲面间的拓扑分类的结果. 19 世纪中叶， Riemann 发现了多值复变解析函数可转化为闭曲面上的单值函数，并得出闭曲面的拓扑分类：闭曲面按同胚分类只有球面和若干个环面的连通和 (或) 球面与若干个射影平面的连通和. 此后拓扑学所应研究的对象及其重要性逐渐清晰，更多的数学家在致力于这方面的研究.

拓扑学最早形成一门学科应归功于 Poincaré. 他在研究代数簇 (复变函数，微分方程) 的基础上，通过将空间剖分成若干个单形的组合，得出空间的 Betti 数，挠系数的计算方法 (这就是以后的同调群)，还得出 Euler 定理的一般形式及基本群，流形对偶定理等结果. 他在 1894—1912 年得出的这一系列成果，标志着组合拓扑学的创立.

1910—1920 年左右，以 Hausdorff, Alexander 为代表产生点集拓扑这一分支. 1930 年左右近代关于群的思想进入拓扑学，组合拓扑变成为现在的代数拓扑. 1940 年左右，以 Whitney 对微分流形的研究为标志，产生了微分拓扑这一分支. 至于研究低维流形的几何拓扑学这一分支，其问题的提出可追溯到 Poincaré 的那个时期，但只是在近几十年来才有较多的进展和结果.

拓扑学发展到今天已经有诸多的分支，有着丰富的结果和方法. 拓扑学已成为近代纯粹数学的重要支柱，它的方法和结果日益地的渗透到分析、代数、几何、计算甚至于物理学等各个领域.

第一章 拓扑空间

§1 度量空间

设集合 $R^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i$是任意实数$, 1 \le i \le n\}$, 则当 $n = 3$ 时就是空间解析几何课程中现实空间的点的集合，其中 R^n 中的元素 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 叫做点， x_i 是点 x 的坐标分量. 两点 x, y 的距离自然是

$$\rho(x,y) = [\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}} \in R^1$$

尽管当 $n > 3$ 时 R^n 已没有直观意义，但 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 仍叫做点， $\rho(x, y)$ 仍叫 x, y 之间的距离.

从 R^n 到 R^1 的对应 $f: R^n \to R^1$ 是 n 个实变数的实值函数，我们称 f 为连续函数时就需要 R^n 中的距离的概念. 集合 R^n 赋予上述距离 $\rho: R^n \times R^n \to R^1$, 则 (R^n, ρ) 叫做 欧氏空间. 上述 ρ 叫做欧氏空间的 通常度量. 这个通常度量显然满足以下性质： $\rho: R^n \times R^n \to R^1$ 是非负函数且

D1) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;

D2) 对称性： $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

D3) 三角不等式： $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$;

其中性质 D3) 的证明利用线性代数中关于内积的 Schwarz 不等式.

现在我们抛弃具体的集合 R^n, 抛弃所赋予的具体的距离 ρ, 只保留性质 D1)–D3), 就可以引进更一般的度量空间.

定义 1.1　设 X 为集，其元素叫做点，记为 $x, y, z, \rho: X \times X \to R^1$ 为非负函数满足 D1)–D3)，则 (X, ρ) 叫做 *度量空间*，函数 ρ 叫 (X, ρ) 的 *度量*，$\rho(x, y)$ 叫做 x, y 间的距离．在明确所赋予的 ρ 时，(X, ρ) 可简记为 X．

例 1.2　n 维欧氏空间 $R^n = (R^n, \rho)$，其度量 ρ 为

$$\rho(x, y) = [\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$$

例 1.3　Hilbert 空间 $R^\omega = (R^\omega, \rho)$，其中集合 $R^\omega = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in R^1, i = 1, 2, \ldots, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty\}$ 而度量 $\rho: R^\omega \times R^\omega \to R$ 定义为

$$\rho(x, y) = [\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(这是一个确定实数)}$$

显然 ρ 满足 D1)–D2)，在证明 D3) 时，可以根据 n 维欧氏空间 R^n 中的三角不等式再令 $n \to \infty$．

例 1.4　设集合 X 为闭区间 $[a, b]$ 上所有连续函数，令

$$\rho_1(x(t), y(t)) = \max_{a \le t \le b} | x(t) - y(t) |$$

$$\rho_2(x(t), y(t)) = [\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt]^{\frac{1}{2}}$$

则 $(X, \rho_1), (X, \rho_2)$ 都是度量空间．（习题）

例 1.5　X 为任一集合，定义 $\rho(x, y) = 0$，当 $x = y$；$\rho(x, y) = 1$，当 $x \neq y$，则 (X, ρ) 是度量空间，叫做 *离散度量空间*.

现在我们要把数学分析中的邻域概念引进度量空间．分析中把开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 叫做点 a 的 ε- 邻域，即数轴上与点 a 距离小于 ε 的所有点．因此我们作如下定义：

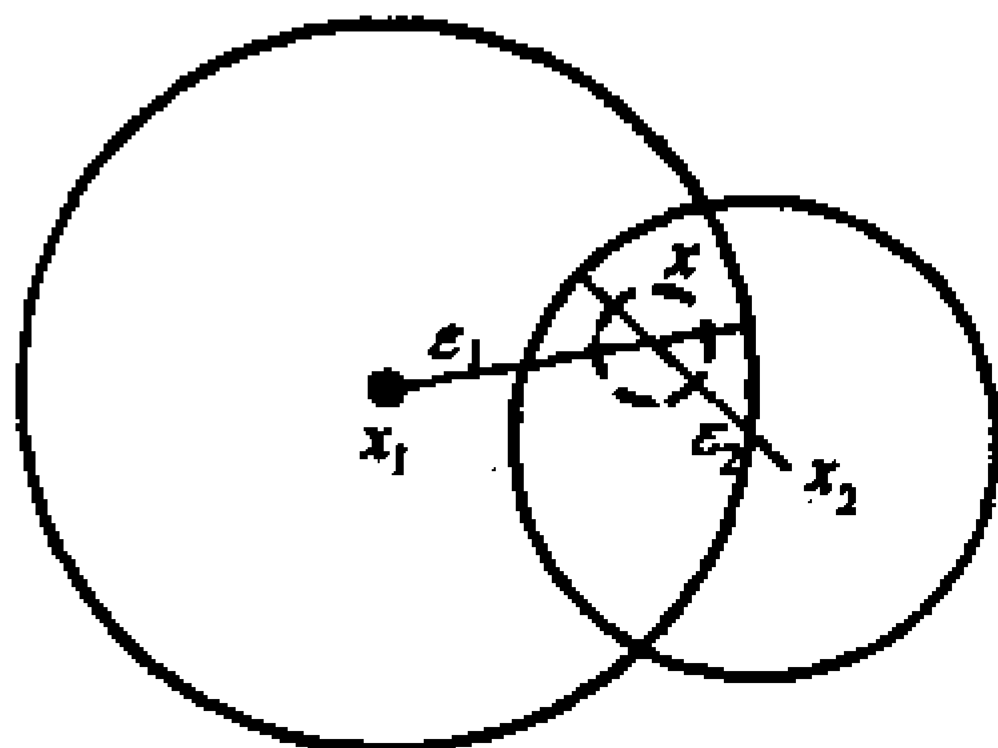
定义 1.6　设 (X, ρ) 为度量空间，$x \in X, \epsilon$ 为正数，则 X 的子集 $B(x, \epsilon) = \{y \in X, | \rho(y, x) < \epsilon\}$ 叫做以点 x 为中心，以 ϵ 为半径的 *球形邻域*，简称为 x 的 ϵ- 邻域.

命题 1.7 设 $\mathcal{B}$ 为度量空间 (X,ρ) 所有球形邻域组成的族，则

(1) $X=\cup_{B\in\mathcal{B}}B$.

(2) 若 $x\in B_1\cap B_2$, 其中 $B_1,B_2\in\mathcal{B}$, 则存在 x 的球形邻域 B_x, 使 $x\in B_x\subset B_1\cap B_2$.

(3) 若 $x\in B, B\in\mathcal{B}$, 则存在 X 的球形邻域 B_x 使 $x\in B_x\subset B$.



证：(1) 因为每点 x 属于它的任何球形邻域，故 $X=\cup_{B\in\mathcal{B}}B$.

(2) 设 $B_i=B(x_i,\epsilon_i), i=1,2$. 令 $\epsilon=\min\{\epsilon_1-\rho(x,x_1), \epsilon_2-\rho(x,x_2)\}$, 则 $x\in B(x,\epsilon)$. 而对任意 $y\in B(x,\epsilon)$, $\rho(y,x_i)\leq\rho(y,x)+\rho(x,x_i)<\epsilon+\rho(x,x_i)\leq\epsilon_i-\rho(x,x_i)+\rho(x,x_i)=\epsilon_i(i=1,2)$, 故 $y\in B(x_1,\epsilon_1)\cap B(x_2,\epsilon_2)$.

(3) 设 $B=B(x_0,\epsilon_0)$, 取 $\epsilon=\epsilon_0-\rho(x,x_0)$, 则 $x\in B(x,\epsilon)\subset B$.

在实变函数论课程中已经学到，实直线上的开集是由内点组成的集合 (点集合), 因此我们有

定义 1.8 若 A 是度量空间 X 的子集，$a\in A$ 叫 A 的在 X 中的 内点, 如果 a 有一球形邻域 $\subset A$. A 的在 X 中的内点全体叫做 A 的在 X 中的 内部, 记作 $\mathrm{Int}A$. A 叫做 X 的开集 若 $A=\mathrm{Int}A$.

命题 1.9 A 是开集 $\Longleftrightarrow$ A 是若干球形邻域并集. (复习题)

定理 1.10 设 $\mathcal{T}$ 是度量空间 X 的全体开集组成的族, 则 $\mathcal{T}$ 满足

(O1) X 和空集 ϕ 属于 $\mathcal{T}$;

(O2) 若 $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, 则 $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$;

(O3) 任意多个开集 (即 $\mathcal{T}$ 的成员) 的并集仍 $\in \mathcal{T}$.

证: (O1) 和 (O3) 是明显的. 现在证明 (O2). 若 $O_1 \cap O_2 = \phi$, 则由 (O1) 得出它是开集. 设 $O_1 \cap O_2 \neq \phi, x \in O_1 \cap O_2$ 为任一点, 则由 O_1, O_2 为开集. 存在球形邻域 $B(x, \epsilon_1) \subset O_1, B(x, \epsilon_2) \subset O_2$, 因而 $x \in B(x, \epsilon_1) \cap B(x, \epsilon_2) \subset O_1 \cap O_2$, 由命题 1.7(2), 存在球形邻域 $B(x, \epsilon)$ 使 $x \in B(x, \epsilon) \subset O_1 \cap O_2$, 即 x 为内点.

定义 1.11 度量空间 X 的子集 A 叫 X 的 **闭集**, 如果 A 的余集 $X \backslash A$ 是 X 的开集.

定理 1.12 设 $\mathcal{F}$ 为度量空间 X 的全体闭集组成的族, 则 $\mathcal{F}$ 满足

(F1) X 和空集 $\phi \in \mathcal{F}$;

(F2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, 则 $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$;

(F3) 任意多个闭集 (即 $\mathcal{F}$ 的成员) 的交集仍 $\in \mathcal{F}$.

证: 由于 de Morgan 公式 (§1 习题 1), 本定理和定理 1.10 可互相导出.

例 1.13 容易证明, 有限子集特别是独点集一定是闭集. 一维欧氏空间 R^1 中开区间 (a, b) 是无穷多个闭集的并. 试举例说明无穷多个开集的交集不必是开集.

在数学分析中, 极限概念是连续性概念的基础, 今推广到度量空间.

定义 1.14 设 A 是度量空间 X 的子集, $x \in X$, 若 x 的任一球形邻域 $B(x, \epsilon)$ 与 $A \backslash \{x\}$ 的交非空, 称 x 为 A 的 (在 X 中) 的 **聚点**. A 和它的所有聚点的并集叫做 A(在 X 中) 的 **闭包**, 记作 $\overline{A}$. 如果 $\overline{A} = X$, 则 A 叫做 X 的 **稠密子集**.

例 1.15 设 $X = R^1$, 如果 $A = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$, 则点

$x=\frac{1}{n}\in A$, 但不是 A 的聚点, 点 $x=0\notin A$ 但它是 A 的聚点. $0,1$ 都是 $A=[0,1)$ 的聚点, 前者 $\in A$, 后者 $\notin A$.R^1 的有理点集是稠密子集.

命题 1.16 (1) X 的有限子集无聚点.

(2) X 的无穷子集 A 的每二点距离都大于一个固定正数, 则 A 无聚点.

(3) A 是闭集 $\iff A=\overline{A}$.

证: 我们只证明 (3), 把 (1) 和 (2) 留作习题. 设 A 为闭集, 则 $X\backslash A$ 为开集. 若 $x\in\overline{A}\backslash A$, 则 $x\in X\backslash A$, 有 x 的球形邻域 $B_x\subset X\backslash A$, 但是 $B_x\cap A\backslash\{x\}\neq\phi$ (这是因为 x 是 A 的聚点), 因此发生矛盾, 从而只能是 $\overline{A}\backslash A=\phi,\overline{A}=A$. 反之, 若 $A=\overline{A}$, 而对于 $x\in X\backslash A$, 如果 x 的任一球形邻域都不含于 $X\backslash A$ 则 $x\in\overline{A}\backslash A$ 与 $A=\overline{A}$ 矛盾, 故有 x 的球形邻域 $B_x\subset X\backslash A, X\backslash A$ 为开集, 从而 A 是闭集.

定理 1.17 度量空间的子集及其闭包具有下列性质:

(C1) $\overline{\phi}=\phi$;

(C2) $A\subset\overline{A}$;

(C3) $\overline{\overline{A}}\subset\overline{A}$;

(C4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证: (C1) 和 (C2) 由闭包的定义直接得出. 今证 (C3). 由定义, $x\in\overline{\overline{A}}\Longrightarrow x$ 的每一邻域 $U(x)$ 含有 $\overline{A}$ 的一点 y; $y\in\overline{A}\Longrightarrow y$ 的每一邻域 $W(y)$ 含有 A 的一点 z. 利用命题 1.7(3), 可取 $W(y)\subset U(x)$, 因此 x 的每一邻域 $U(x)$ 含有 A 的一点 z, 从而根据定义得出 $x\in\overline{A}$.

(C4) 的证明: 因为 $A\subset A\cup B$, 由定义 $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$, 同样的, $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$, 因此 $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$, 现在用反证法证明 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. 设 $x\in\overline{A\cup B}$ 而 $x\notin\overline{A}$ 且 $x\notin\overline{B}$. 由定义 1.14, x 有一邻域 $U(x)$ 不含 A 的点, 且 x 有一邻域 $V(x)$ 不含 B 的点, 根据命题 1.7(2), x 有一邻域 $W(x)\subset U(x)\cap V(x)$ 因而不含 $A\cup B$ 的点, 与 $x\in\overline{A\cup B}$ 矛盾.

定义 1.18 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 的点序列，$a \in X$. 如果对于 a 的每一球形邻域 $B(a,\epsilon)$, 存在自然数 N, 使对于所有 $n > N$ 有 $x_n \in B(a,\epsilon)$, 称点列 $\{x_n\}$ 收敛到点 a: $\{x_n\} \longrightarrow a$.

命题 1.19 a 是度量空间 X 中一个子集 A 的聚点 $\Longleftrightarrow$ $A\backslash\{a\}$ 中存在一个由完全不同的点组成的点列收敛到 a.

在本节结束前，我们指出二点间距离这一概念的推广：

(1) 度量空间 X 的二子集 A, B 间的距离

$$\rho(A,B) = \begin{cases} 0 & \text{当}A\text{或}B\text{空集} \\ \inf\{\rho(x,y) \mid x \in A, y \in B\} & \text{当}A,B\text{都非空} \end{cases}$$

(2)X 中一点 x 到子集 A 的距离为上述的特例.

(3)X 的子集 A 的直径

$$\operatorname{diam}(A) = \begin{cases} 0 & \text{当}A = \phi \\ \sup\{\rho(x,y) \mid x, y \in A\} & \text{当}A \neq \phi \end{cases}$$

当 $\operatorname{diam}(A) < \infty$, 称 A 为 *有界集*. 一般的，从 $x \notin A$不能推出$\rho(x,A) > 0$; 从 $A \cap B = \phi$ 不能推出 $\rho(A,B) > 0$, 但是有

命题 1.20 若 $A \neq \phi, x \notin \overline{A}$, 则 $\rho(x,A) > 0$.(习题)

习　题

1. 设 X 为集合，$\{A_\alpha\}$ 为 X 的一族子集，下标 α 所取值的个数可以有限或无限，试证 de Morgan 公式

$$X\backslash \cup_\alpha A_\alpha = \cap_\alpha(X\backslash A_\alpha), \qquad X\backslash \cap_\alpha A_\alpha = \cup_\alpha(X\backslash A_\alpha)$$

2. 分别定义 ρ_1, ρ_2: $R^n \times R^n \to R$ 为

$$\rho_1(x,y) = \max_{1 \le i \le n}\{| x_i - y_i |\}$$

$$\rho_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |$$

证明： ρ_1,ρ_2 都是集合 R^n 上的度量.

3. 设 (X,ρ) 为度量空间，分别定义 $\rho_1,\rho_2: X\times X\to R$ 为

$$\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}, x,y\in X$$

$$\rho_2(x,y) = \begin{cases} \rho(x,y) & \text{当}\rho(x,y)\le 1 \\ 1 & \text{当}\rho(x,y)>1 \end{cases}$$

证明： ρ_1,ρ_2, 是 X 上的度量.

4. 试证： Hilbert 空间 R^ω 的任二点 x,y 有一 "中点"z, 即点 z 使 $\rho(x,z)=\rho(y,z)=\frac{1}{2}\rho(x,y)$. 但度量空间不必有此性质，试用 R^2 的子空间举例说明.

5. 证明：例 1.4, 命题 1.9, 命题 1.20.

6. 设 $f: R^n\to R$ 为欧氏空间 R^n 上的连续函数，证明：满足 $f>0(f\ge 0)$ 的点集是 R^n 的开 (闭) 子集.

7. 试证： (a) $\text{Int}A$ 是 A 所包含的所有开集的并集；

(b) $\overline{A}$ 是所有含 A 的闭集的交集.

8. 试确定下列平面点集的内部和闭包：

(a) $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\le 2\}$;

(b) R^2 除去两条坐标轴.

9. 若 A 是度量空间 X 的稠密子集， O 为 X 中的开集. 证明： $O\subset\overline{A\cap O}$.

§2 拓扑空间

欧氏空间的点可用实数刻画，度量空间的点虽不必受此限制，但球形邻域这种连续性或极限概念的基础仍旧通过实数刻划. 现在抛弃距离的概念，直接用开集来表示 "邻域", 只保留定理 1.10 中开集性质 (O1)–(O3), 我们引进拓扑空间的概念.

定义 2.1 设 X 为集合， $\mathcal{T}$ 是 X 的一个子集族，其成员满足开集公理 (O1)–(O3), 则 $\mathcal{T}$ 称为集 X 上的一个 *拓扑*, $\mathcal{T}$ 的成员称为 X 的 *开集*. 集 X 连同它的拓扑 $\mathcal{T}$ 称为 *拓扑空*

间，记作 $(X,\mathcal{T})$, 在明确所赋予的拓扑 $\mathcal{T}$ 时，$(X,\mathcal{T})$ 可简记为 X.

例 2.2　度量空间 (X,ρ) 的度量 ρ 可以确定出全体开集，由定理 1.10, 全体开集所成的族 $\mathcal{T}$ 满足 (O1)–(O3), 因此度量空间 (X,ρ) 是一个拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$, 而这里的 $\mathcal{T}$ 称为度量 ρ 所导出的拓扑. 反之，若拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 存在 X 上的度量 ρ 使 $\mathcal{T}$ 是由 ρ 诱导的拓扑，称 $(X,\mathcal{T})$ 是 能度量化 拓扑空间.

例 2.3　任非空集合 X, 有两个最极端的拓扑，第一 $\mathcal{T}$ 由 X 和空集这两个子集组成，开集个数最少，叫 平凡拓扑. 第二 $\mathcal{T}'=2^X$(表示 X 的全体子集组成的族) 叫 离散拓扑. 离散拓扑是例 1.5 中离散度量所诱导的拓扑.

例 2.4　设 $X=\{a,b,c\}$ 令

$$\mathcal{T}=\{\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$$

不难验证，$\mathcal{T}$ 是 X 上拓扑. 因此，$(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间.

例 2.5　设 X 为不可数集，令

$$\mathcal{T}=\{X\backslash C \mid C\text{是}X\text{的可数子集}\}\cup\{\phi\}$$

则 $(X,\mathcal{T})$ 也是一个拓扑空间.

度量空间的球形邻域族 $\mathcal{B}$ 是它的开集族 $\mathcal{T}$ 的子族，且它的开集是 $\mathcal{B}$ 的若干个成员的并集 (命题 1.9), 这与向量空间的每一向量可由其基向量线性表示有某种相似之处. 因此，我们把 $\mathcal{B}$ 看作 $\mathcal{T}$ 的基. 参照命题 1.7(1),(2) 作如下定义.

定义 2.6　称集合 X 的子集族 $\mathcal{B}=\{B_\alpha\}$ 为 X 的 拓扑基, 若

(1) $X=\cup_\alpha B_\alpha$;

(2) 若 $x\in B_\alpha\cap B_\beta$, 则存在 $B_\gamma\in\mathcal{B}$ 使 $x\in B_\gamma\subset B_\alpha\cap B_\beta$.

现在，象度量空间中由球形邻域形成开集 (命题 1.9) 一样，我们从 X 的拓扑基 $\mathcal{B}$ 出发，构造 X 的一个拓扑.

定义 2.7 设 $\mathcal{B}=\{B_\alpha\}$ 是集 X 的拓扑基，X 的子集 A 叫做 *相对于 $\mathcal{B}$ 而言的开集*，如果 A 是 $\mathcal{B}$ 中若干成员的并集.

空集既可以属于 $\mathcal{B}$，也可以不属于 $\mathcal{B}$. 因为上述定义中若干个成员可以包括 0 个成员，因此空集是相对于 $\mathcal{B}$ 的开集. $B_\alpha \in \mathcal{B}$ 当然是相对于 $\mathcal{B}$ 的开集.

命题 2.8 X 的子集 A 是相对于拓扑基 $\mathcal{B}$ 的开集 $\Longleftrightarrow$ 对每点 $a\in A$，存在 $B_\alpha \in \mathcal{B}$ 使 $a\in B_\alpha \subset A$.(复习题)

定理 2.9 若 $\mathcal{B}=\{B_\alpha\}$ 是集 X 的拓扑基，则由所有相对于 $\mathcal{B}$ 的开集组成的子集族 $\mathcal{T}$ 是 X 的一个拓扑，且 $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$. 特别的若 $\mathcal{B}$ 本身已是 X 的一个拓扑，则 $\mathcal{B}=\mathcal{T}$.

这里的拓扑 $\mathcal{T}$ 叫做由 *拓扑基 $\mathcal{B}$ 诱导的拓扑*，而 $\mathcal{B}$ 叫做拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的拓扑基.

证：由拓扑基的性质 (1) 以及空集是 0 个 $\mathcal{B}$ 的成员的并集，因此 (O1) 显然成立. 因为 $\mathcal{B}$ 的若干成员的若干并集是 $\mathcal{B}$ 的若干成员的并集，因此 (O3) 成立. 现在证明 (O2)，即 $\mathcal{T}$ 的两个成员 U_1,U_2 的交集 $U_1\cap U_2$ 仍是 $\mathcal{T}$ 的成员. 设 $x\in U_1\cap U_2$，由命题 2.8，存在 $\mathcal{B}$ 的成员 B，使 $x\in B_i\subset U_i(i=1,2)$. 根据 $\mathcal{B}$ 的性质 (2)，存在 $\mathcal{B}$ 的成员 B 使 $x\in B\subset B_1\cap B_2\subset U_1\cap U_2$. 再由命题 2.8 则 $U_1\cap U_2$ 是 $\mathcal{T}$ 的成员. 于是 $\mathcal{T}$ 满足 (O1)–(O3)，是 X 的拓扑. 显然 $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$. 特别的，当 $\mathcal{B}$ 已是一个拓扑，由性质 (O3) 和定义 2.7 就得到 $\mathcal{B}=\mathcal{T}$.

一个集合可能有许多不同的拓扑基，例如欧氏空间 R^n 的通常度量 ρ 和 §1 习题 2 中的度量 ρ_1,ρ_2，它们所决定的三个不同的球形邻域族就是 R^n 的三个不同拓扑基. 为着判断同一集合的两个不同拓扑基是否诱导出相同拓扑，我们给出

定义 2.10 一个集合的两个拓扑基是 *等价的*，如果它们诱导出这一集合的同一个拓扑. 一个集合的两个度量是 *拓扑等价的*，如果它们所决定的球形邻域所组成的拓扑基等价.

定理 2.11 集 X 的两个拓扑基 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 等价 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{B}$ 的每个成员是相对于 $\mathcal{B}'$ 的开集，且 $\mathcal{B}'$ 每个成员是相对于 $\mathcal{B}$ 的

开集.

证：充分性. 设 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 分别诱导出拓扑 $\mathcal{T}(\mathcal{B}),\mathcal{T}(\mathcal{B}')$. 从拓扑基诱导拓扑的定义及定义 2.7 可知， $\mathcal{T}(\mathcal{B}')$ 每个成员是 $\mathcal{B}'$ 若干成员的并集. 从假设及定义 2.7 可知， $\mathcal{B}'$ 每个成员是 $\mathcal{B}$ 的若干成员并集，因此 $\mathcal{T}(\mathcal{B}')\subset\mathcal{T}(\mathcal{B})$. 同理 $\mathcal{T}(\mathcal{B})\subset\mathcal{T}(\mathcal{B}')$. 因此 $\mathcal{T}(\mathcal{B})=\mathcal{T}(\mathcal{B}')$.

必要性. 由假设 $\mathcal{T}(\mathcal{B})=\mathcal{T}(\mathcal{B}')$. 但显然有 $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}(\mathcal{B}),\mathcal{B}'\subset\mathcal{T}(\mathcal{B}')$. 因此 $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}(\mathcal{B}'),\mathcal{B}'\subset\mathcal{T}(\mathcal{B})$, 此为所求.

例 2.12 欧氏空间 R^n 的通常度量 ρ 和 §1 习题 2 中的度量 $\rho_1;\rho_2$ 彼此拓扑等价. (复习题)

例 2.13 $\mathcal{B}$ 是度量空间 (X,ρ) 的所有球形邻域组成的族，令 $\mathcal{B}_0=\{B(x,\epsilon)\in\mathcal{B}\mid x\in X,\epsilon$ 为正有理数 $\}$, 不难验证 $\mathcal{B}_0$ 是 X 的拓扑基， $\mathcal{B}_0\subset\mathcal{B}$ 且 $\mathcal{B}_0$ 与 $\mathcal{B}$ 等价.

习　题

1. 设 $X=\{0,1\}$, 令 $\mathcal{T}_1=\{\phi,X\},\mathcal{T}_2=\{\phi,\{0\},X\},\mathcal{T}_3=\{\phi,\{1\},X\},\mathcal{T}_4=\{\phi,\{0\},\{1\},X\}$, 则 $\mathcal{T}_i$ 都是 X 上拓扑 $(i=1,2,3,4)$, 其中 $\mathcal{T}_2$ 叫 Sierpinski 空间.

2. 设 $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为集 X 上一族拓扑，证明 $\cap_{\alpha\in A}\mathcal{T}_\alpha$ 仍是 X 上的拓扑.

3. 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间， X^+ 为 X 和另一点 $*$ 的不相交并集， $\mathcal{T}^+=\mathcal{T}\cup\{X^+\}$, 证明： $(X^+,\mathcal{T}^+)$ 是拓扑空间.

4. 设 N 为自然数集， $A_n=\{n,n+1,\ldots\},n\in N$ 并令 $\mathcal{T}=\{\phi,A_1,A_2,\ldots\}$, 证明： $\mathcal{T}$ 为 N 上拓扑. 写出含 4 所有开集.

5. 设集 X 含三个点. 试作出 X 上两个拓扑，使它们并集不是 X 上拓扑.

6. 设集 X 上有任意多个拓扑 $\mathcal{T}_\alpha$, 试作 X 上拓扑 $\mathcal{T}\supset\cup_\alpha\mathcal{T}_\alpha$.

7. 设 (X,ρ) 是度量空间，并且它有一个由有限个成员组

成的拓扑基，证明：(X,ρ) 必是只含有限个点的离散空间.

8. 设 X 为 n 阶实方阵全体，对每个方阵 $a=(a_{ij})\in X$ 及 $r>0$，令 $U_r(a)=\{(b_{ij}),\in X \mid |a_{ij}-b_{ij}|<r, i,j=1,2,\ldots,n\}$ 证明：$\mathcal{B}=\{U_r(a)\mid a\in X, r\in R, r>0\}$，是 X 的拓扑基.

9. 证明 §1 习题 3 中的度量 ρ_1,ρ_2 都和 ρ 拓扑等价.

§3 关于子集的基本概念

在数学分析中，邻域概念是讨论连续性概念的基础. 对拓扑空间来说，我们将抛弃度量空间中球形邻域的概念，而直接将开集作为邻域.

定义 3.1 拓扑空间 X 的任一开集 U 叫做它的每一点 $x\in U$ 的 邻域，也叫做它的子集 $A\subset U$ 的邻域.

在度量空间中，球形邻域只是它的一个点 (球心) 的球形邻域，而开集并未说成是邻域. 但若将度量空间作为拓扑空间时，它的任一开集是其中任一点的邻域.

拓扑空间中， 子集的内点，内部，子集的聚点，闭包，闭集，点序列收敛于 a 点 等概念的定义都可仿照度量空间中同名概念的定义得到，只要把概念中"度量空间"改为"拓扑空间","球形邻域"改为"邻域"，而且我们立刻得到以下定理.

定理 3.2 设 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 所有闭集组成的族，则 $\mathcal{F}$ 满足 $(F1)-(F3)$. (参见定理 1.12)

定理 3.3 拓扑空间 X 的子集和它的闭包满足 (C1)–(C4) (参见定理 1.17).

关于子集的内部和闭包，综合起来有以下

命题 3.4 对拓扑空间 X 的任意子集 A,B，有

(1) $\mathrm{Int}A\subset A\subset\overline{A}$;

(2) 若 $A\subset B$ 则 $\mathrm{Int}A\subset\mathrm{Int}B, \overline{A}\subset\overline{B}$;

(3) A 是 X 的开集 $\Longleftrightarrow$ $A=\mathrm{Int}A$,

A 是 X 中闭集 $\Longleftrightarrow$ $A=\overline{A}$;

(4) $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}A)=\mathrm{Int}A$, $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

(5) $\text{Int}(A\cap B)=\text{Int}A\cap\text{Int}B$, $\overline{A\cup B};=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(6) $X\backslash\text{Int}A=\overline{X\backslash A}$, $\text{Int}(X\backslash A)=X\backslash\overline{A}$.(习题)

虽然拓扑空间可用开集族 $\mathcal{T}$ 来定义，但同样的可以用闭集族 $\mathcal{F}$, 或子集与它的闭包的对应 $(A\to\overline{A})$ 来定义.

定理 3.5 X 为集合，$\mathcal{F}$ 为 X 的一个子集族满足 (F1)-(F3), 则存在 X 的唯一拓扑 $\mathcal{T}$, 使 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的闭集族.

证：令 $\mathcal{T}=\{X\backslash F\mid F\in\mathcal{F}\}$, 由 de Morgan 公式和性质 (F1)-(F3), 则 $\mathcal{T}$ 满足 (O1)-(O3), 是 X 的一个拓扑. 设 K 是 $(X,\mathcal{T})$ 的闭集，则存在 $X\backslash F\in\mathcal{T}$, 使 $K=X\backslash(X\backslash F)=F$, 即 $K\in\mathcal{F}$, 反之，$\mathcal{F}$ 的每一成员 F 也是 $(X,\mathcal{T})$ 的闭集. 再者，若 $(X,\mathcal{T}')$ 的闭集族也是 $\mathcal{F}$, 容易看出 $\mathcal{T}'=\mathcal{T}$.

定理 3.6 在集 X 的子集之间给出一个对应 $h^*{:}\,A\to A^*$ 使满足定理 1.17 中 (C1)-(C4), 即 $\phi^*=\phi, A\subset A^*, (A^*)^*\subset A^*, (A\cup B)^*=A^*\cup B^*$, 则存在 X 的唯一拓扑 $\mathcal{T}$, 使 $(X,\mathcal{T})$ 的子集 A 与它的闭包 $\overline{A}$ 之间的对应 $h{:}\,A\to\overline{A}$ 就是 $h^*{:}\,A\to A^*$.

证：取 X 的子集族 $\mathcal{F}=\{F\mid F=F^*\}$, 先证明 $\mathcal{F}$ 满足 (F1)-(F3). 由对应 h^* 的性质 $1,\phi\in\mathcal{F}$. 由 h^* 性质 2, $X\subset X^*$, 但是显然有 $X^*\subset X$, 因此 $X=X^*, X\in\mathcal{F}$. 因此 (F1) 满足.

任意 $F_1,F_2\in\mathcal{F}$, 则 $F_1=F_1^*, F_2=F_2^*$, 由 h^* 性质 4, 有 $(F_1\cup F_2)^*=F_1^*\cup F_2^*=F_1\cup F_2$, 因此 $F_1\cup F_2\in\mathcal{F}.\mathcal{F}$ 满足 (F2).

设 $F_\alpha\in\mathcal{F}$, 即 $F_\alpha=F_\alpha^*$, 且显然有 $\cap_\alpha F_\alpha\subset F_\alpha$. 由 h^* 性质 4 可得出 $A\subset B\Rightarrow A^*\subset B^*$, 因此 $(\cap_\alpha F_\alpha)^*\subset F_\alpha^*=F_\alpha$, 从而有 $(\cap_\alpha F_\alpha)^*\subset\cap_\alpha F_\alpha$. 由 h^* 性质 $2,\cap_\alpha F_\alpha\subset(\cap_\alpha F_\alpha)^*$, 因此 $(\cap_\alpha F_\alpha)^*=\cap_\alpha F_\alpha$, 即 $\cap_\alpha F_\alpha\in\mathcal{F},\mathcal{F}$ 满足 (F3).

根据定理 3.5, 存在 X 的唯一拓扑 $\mathcal{T}$ 使拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的闭集族恰是 $\mathcal{F}$. 令 $(X,\mathcal{T})$ 的子集和它的闭包之间对应为 $h{:}\,A\to\overline{A}$, 则 h 也具有定理 1.17 的性质 (C1)-(C4). 今证明 $h=h^*$, 即对任一子集 $A,\overline{A}=A^*$.

由 h^* 性质 (2) 有 $A \subset A^*$; 由 h 的性质 (4) 可得 $\overline{A} \subset \overline{(A^*)}$, 然后由 $\mathcal{T}$ 的取法得知 A^* 是 $(X,\mathcal{T})$ 的闭集, 即 $\overline{(A^*)} = A^*$, 于是 $\overline{A} \subset A^*$. 同样的, 由 h 的性质 (2) 有 $A \subset \overline{A}$; 根据 h^* 性质 (4) 可得 $A^* \subset (\overline{A})^*$; 然后因为 $\overline{A}$ 是 $(X,\mathcal{T})$ 的闭集, 得出 $\overline{A} \in \mathcal{F}$, 即 $\overline{A}^* = \overline{A}$, 于是 $A^* \subset \overline{A}$. 所以有 $\overline{A} = A^*$. 证毕.

本定理说明, 可用本定理假设中的对应 h^* 作为拓扑空间概念的出发点.

在许多问题中, 我们要把某些子集作为研究对象, 而不必涉及这些子集以外的点. 这时需要把子集当做空间处理, 叫子空间.

定义 3.7 设 (X,ρ) 为度量空间, A 为 X 的非空子集, 容易验证: $\rho|_{A\times A}: A\times A \to R$ 为 A 的度量. 称 $\rho|_{A\times A}$ 为 X 的度量 ρ 在 A 上的 **诱导度量**, 度量空间 $(A,\rho|_{A\times A})$ 叫 (X,ρ) 的 **子空间**.

定义 3.8 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间, A 为 X 的非空子集, 容易验证 A 的子集族 $\mathcal{T}|_A = \{O\cap A \mid O \in \mathcal{T}\}$ 是 A 上一个拓扑. $\mathcal{T}|_A$ 称为 X 的拓扑 $\mathcal{T}$ 在 A 上的 **诱导拓扑**, 拓扑空间 $(A,\mathcal{T}|_A)$ 叫做 $(X,\mathcal{T})$ 的 (拓扑) 子空间.

命题 3.9 设 A 为拓扑空间 X 的子空间, $F \subset A$, 则 F 是 A 的闭集 $\Longleftrightarrow$ 存在 X 中闭集 C, 使 $F = C\cap A$.

证: 设 F 为 A 的闭集, 则 $A\backslash F$ 为 A 的开集, 即 $A\backslash F \in \mathcal{T}|_A$, 存在 X 开集 O 使 $A\backslash F = O\cap A$. 容易验证, $(X\backslash O)\cap A = F$ 而 $X\backslash O$ 为 X 的闭集. 反之, 证明类似.

下面给出欧氏空间 $R^n(n>0)$ 的几个重要子空间.

例 3.10 设 n 为给定正整数

(1) $n-1$ 维 (单位) 球面, $S^{n-1} = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in R^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$;

(2) n 维 (单位) 闭球体 $E^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in R^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \le 1\}$;

(3) n 维 (单位) 闭方体 $I^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in R^n \mid 0 \le$

$x_i \leq 1\}$.

其中 (2) 中若将 "≤ 1" 改为 "< 1" 则是开球体 $\mathring{E}^n$ 为 E^n 内部. (3) 中若将 "$0 \leq x_i \leq 1$" 改为 "$0 < x_i < 1$" 则是开方体 $\mathring{I}^n$ 为 I^n 内部.

例 3.11 设 $X = R^1, Y = [0,1)$, 则 $[0, \frac{1}{2})$ 是 Y 的开集但不是 X 的开集. 同样 $[\frac{1}{2}, 1)$ 是 Y 的闭集但不是 X 的闭集.

习 题

1. 证明命题 3.4.

2. 证明：离散拓扑空间中每个子集既开又闭.

3. 证明：度量空间的独点子集总是闭集.

4. 证明：若 X 为度量空间， $x \in X$ 且 U 是 x 的邻域，则 U 中含有 x 的邻域 V 使 $\overline{V} \subset U$.

5. 拓扑空间 X 的子集 A 叫稠密子集. 若 $\overline{A} = X$. 证明以下断语彼此等价：

(1) A 是 X 的稠密子集.

(2) F 是 X 的任意闭集， $A \subset F$, 则 $F = X$.

(3) U 是 X 的任意非空开集，则 $U \cap A \neq \phi$.

(4) $Int(X - A) = \phi$.

6. 设 Y 为拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的子空间， Z 为 Y 的子空间，证明： Z 为 X 的子空间，换言之 $(\mathcal{T}|_Y)|_Z = \mathcal{T}|_Z$.

7. 设 Y 为 $(X, \mathcal{T})$ 的子空间， $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{T}$ 的拓扑基，则 $\mathcal{B}|_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ 是 $\mathcal{T}|_Y$ 的拓扑基.

8. 设 X 为拓扑空间， A, Y 与 Z 都是 X 的子集，使 $A \subset Y \cup Z$, 证明：若 A 是 $Y \cup Z$ 的开集，则 $A \cap Y, A \cap Z$ 分别是 Y, Z 的开集.

9. 把整数集 Z 看成实直线 R 的子集，试写出 Z 的子空间拓扑.

10. 试以例 2.5 中的 X 为例，说明度量空间的命题 1.19 对拓扑空间不成立.

§4 连续映射与同胚

在 §3 中已提到，邻域概念是连续性概念的基础. 在我们从邻域 (即开集) 出发定义了拓扑空间之后，下面进而讨论拓扑空间之间的连续映射.

在数学分析中，函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点连续，就是对任给正数 ϵ, 存在正数 δ 使 $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 用邻域的语言来叙述，就是对 $f(x_0)$ 的任意 ϵ 邻域 $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) = V$, 存在 x_0 的 δ 邻域 $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 使 $f(U) \subset V$. 一般的有

定义 4.1 设：$f : X \to Y$ 为拓扑空间 X 到 Y 的 (单值) 对应，$x_0 \in X$, 如果对 $f(x_0) \in Y$ 的任一邻域 V, 总存在 x_0 的邻域 U 使 $f(U) \subset V$, 称 f *在* x_0 *点连续*. 若 f 在 X 的每一点连续，称 f 为 X 到 Y 的 **连续映射**, 简称 **映射**, 当 $Y = R$, 称 $f : X \to R$ 为*连续 (实) 函数*.

定理 4.2 设 $f : X \to Y$ 为空间之间单值对应，则以下断语等价：

(1) f 是映射.

(2) 对 Y 的任一开集 V,$f^{-1}(V)$ 是 X 的开集.

(3) 对 Y 的任一闭集 F,$f^{-1}(F)$ 是 X 的闭集.

(4) 对 X 的每一子集 A,$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

证明：(1)$\Longrightarrow$ (2). 若 $f^{-1}(V) = \phi$, 显然是开集. 设 $f^{-1}(V) \neq \phi, x_0 \in f^{-1}(V)$ 为任一点，即 $f(x_0) \in V$, 由连续性定义，存在 x_0 的邻域 U, 使 $f(U) \subset V$, 即 $x_0 \in U \subset f^{-1}(V)$, x_0为$f^{-1}(V)$ 的内点. 由 x_0 的任意性，故 $f^{-1}(V)$ 为 X 的开集.

(2)$\Longrightarrow$ (3). 令 $V = Y\backslash F$, 则 V 为 Y 的开集，$f^{-1}(V)$ 为 X 的开集. 从而 $f^{-1}(F) = f^{-1}(Y\backslash V) = X\backslash f^{-1}(V)$ 为 X 的闭集.

(3)$\Longrightarrow$ (4). 注意到 $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, 再根据命题 3.4(3), $\overline{f(A)}$ 是闭集，由 (3) 得 $f^{-1}(\overline{f(A)})$ 是 X 的闭

集. 由此可见 $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, 即 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(4) $\Longrightarrow$ (1). 设 (1) 不成立, X 中存在一点 x_0, f在x_0 点不连续. 因此 Y 中存在 $f(x_0)$ 的一个邻域 V, 使 x_0 的任一邻域 U 都有 $f(U)$ 不包含于 V, 即 $U \cap [f^{-1}(Y\backslash V)\backslash\{x_0\}] \neq \phi$, 令 $A = f^{-1}(Y\backslash V)$, 则 x_0 为 A 的聚点, $x_0 \in \overline{A}$. 另一方面, $f(x_0) \notin Y\backslash V = \overline{Y\backslash V}$. 因为 $f(f^{-1}(Y\backslash V)) \subset Y\backslash V$, 因此 $f(x_0) \notin \overline{f(A)}$,(4) 不成立.

在数学分析中, 连续性可通过极限来刻画. 一般地, 在度量空间之间的连续映射可用极限来刻画, 但在拓扑空间中则不可能. 这是因为在一般拓扑空间中不能用点列的收敛来刻划聚点, 参见 §3 习题 10. 因此用极限刻划连续性要受某些限制.

定理 4.3 设 $f: X \to Y$ 为拓扑空间 X, Y 之间的单值对应, 若 f 在 x 点连续, 则 $\{x_n\} \to x \Longrightarrow \{f(x_n)\} \to f(x)$, 反之若 X 是度量空间, 且对 X 的每个收敛到 x 的点列 $\{x_n\}$, 有 $\{f(x_n)\} \to f(x)$, 则 f 在 x 点连续.

证: 设 f 在 x 点连续, $\{x_n\} \to x$, 则对 $f(x)$ 的任一邻域 V, 存在 x 的邻域 U 使 $f(U) \subset V$, 且存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时 $x_n \in U$, 从而 $f(x_n) \in V$, 故 $\{f(x_n)\} \to f(x)$.

反之, 设 X 是度量空间, 且 $\{x_n\} \to x \Longrightarrow \{f(x_n)\} \to f(x)$. 如果 f 在 x 点不连续, 则存在 $f(x)$ 的邻域 V, 对 x 的任一球形邻域 $B(x, \delta_n)$, 总有点 $x_n \in B(x, \delta_n)$使$f(x_n) \notin V$, 取正实数序列 $\delta_n \to 0$, 则$\{x_n\} \to x$, 而$\{f(x_n)\}$ 不收敛于 $f(x)$, 矛盾.

例 4.4 (1) 常值映射 $c_{y_0}: X \to Y, c_{y_0}(X)$ 为 Y 的独点子集 $\{y_0\}$.

(2) 恒等映射 $1_X: X \to X, 1(x) = x$, 对任意 $x \in X$.

(3) 设 A 为 X 的子空间 $i: A \to X$ 叫 包含映射 (或简称为 内射) 若 $i(a) = a$, 对每个 $a \in A$.

(4) 映射 $f: X \to Y$ 在 X 的子空间 A 上的 限制 $f|_A : A \to Y$为$f|_A(a) = f(a)$, 对每个 $a \in A$, 反之, f 叫 $f|_A$ 的

扩张.

(5) 若 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ 为映射，则合成 $g\cdot f:X\to Z$ 也是映射，其中 $g\cdot f$ 定义为 $(g\cdot f)(x)=g(f(x)), x\in X$. 这是数学分析中两个函数的复合函数概念的推广.

粘接引理 4.5 设 $F_1, F_2, \ldots, F_n$ 为空间 X 的有限个闭子空间，使 $X=\cup_{i=1}^n F_i, f_i:F_i\to Y$ 为映射 $(i=1,2,\ldots,n)$, 且 $f_i|_{F_i\cap F_j}=f_j|_{F_i\cap F_j}$ $(1\le i,j\le n)$, 则由 $f(x)=f_i(x)$, $x\in F_i$ 所定义的单值对应 $f:X\to Y$ 是映射.

证：由设，f_i 和 f_j 在 $F_i\cap F_j$ 上取值相同，因此 $f(x)$ 是唯一的单值对应. 设 C 是 Y 的任一闭集，由 $f_i:F_i\to Y$ 是映射，则 $f_i^{-1}(C)$ 是 F_i 的闭集，由命题 3.9, 存在 X 的闭集 D 使 $f_i^{-1}(C)=D\cap F_i$, 因此也是 X 的闭集 $(i=1,2,\ldots,n)$.

另一方面，$f^{-1}(C)=\cup_{i=1}^n(f^{-1}(C)\cap F_i)=\cup_{i=1}^n f_i^{-1}(C)\cap F_i=\cup_{i=1}^n f_i^{-1}(C)$ 因此由闭集公理 (F2) 得出 $f^{-1}(C)$ 是 X 的闭集. 再由定理 4.2(3) 得出 f 是映射.

在集合论中，等势 (或基数相同) 可作为区分集合的标准. 在解析几何中，正交映射 (即刚体运动加反射) 或非退化线性变换 (即仿射变换) 可作为图形分类的标准. 那么在拓扑学中应以什么变换作为区分空间的标准呢？从保持图形维数的要求来看，单纯的一一对应，或单纯的连续映射不适宜. 因为 Cantor 已指出正方域 (2 维图形) 和闭区间 (1 维图形) 是一一对应的，而 Peano 曲线的例子又说明正方域是闭区间的连续象. 因此人们自然想到用一一对应的而且又连续的映射. 这种想法经微小修改之后得到成功，成了拓扑学区分空间的标准的一种所谓的拓扑变换 (或同胚), 其定义如下.

定义 4.6 设 $f:X\to Y$ 是既单又满的 (即在 f 下成一一对应) 映射，且其逆 $f^{-1}:Y\to X$ 也是映射，称 f 为 X 到 Y 的 同胚, 记作：$f:X\cong Y$. 如果存在这样的同胚 f, 称 X 与 Y 同胚或拓扑等价，记作 $X\cong Y$

例 4.7 $R^n\cong S^n\backslash\{(0,\ldots,0,1)\}$. 记 $p=(0,\ldots,0,1)$,

我们定义球极投影 $f\colon S^n\backslash\{p\}\to R^n$ 为 $f(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})=(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\ldots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}})\in R^n$. 因为 $x_{n+1}\neq 1$, f 的定义是单值的，且由于每个分量是数学分析中的初等函数，因此 f 是映射. 再定义 $g\colon R^n\to S^n\backslash\{p\}$ 为 $g(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2},\ldots,\frac{2y_n}{1+\|y\|^2},\frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1})$, 易知这 $n+1$ 个分量的平方和为 1, 因此 $g(y_1,\ldots,y_n)\in S^n\backslash\{p\}$ 且是单值连续的, 容易验证 $f\cdot g=1_{R^n}$, $g\cdot f=1_{S^n\backslash\{p\}}$ 因此 $g=f^{-1}$ 是映射，f 是同胚, 因而 $f\colon S^n\backslash\{p\}\cong R^n$.

例 4.8 $R^n\cong\mathring{I}^n\cong\mathring{E}^n$. (这些记号参见例 3.10). 我们定义

$$f\colon\mathring{I}^n\to R^n, f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\mathrm{ctg}\pi x_1,\ldots,\mathrm{ctg}\pi x_n).$$

$$g\colon R^n\to\mathring{I}^n, g(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(\frac{\mathrm{arcctg}y_1}{\pi},\ldots,\frac{\mathrm{arcctg}y_n}{\pi})$$

则 $fg=1_{R^n}$, $gf=1_{\mathring{I}^n}$, $g=f^{-1}$, f 和 f^{-1} 都是映射. 再定义

$$f'\colon\mathring{E}^n\to R^n, f'(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\frac{1}{1-\|x\|}(x_1,\ldots,x_n))$$

$$g'\colon R^n\to\mathring{E}^n, g'(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(\frac{1}{1+\|y\|}(y_1,\ldots,y_n))$$

则 $f'g'=1_{R^n}$, $g'f'=1_{\mathring{E}^n}$, f' 为同胚.

例 4.9 设 $S^n_+=\{(x_1,\ldots,x_{n+1})\in S^n\mid x_{n+1}\geq 0\}$ 为 n 维球面 S^n 的上半部分，叫上半球面，则 $S^n_+\cong E^n$ 这里 $f\colon S^n_+\to E^n$ 为 $f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=(x_1,\ldots,x_n)$, $g\colon E^n\to S^n_+$ 为 $g(y_1,\ldots,y_n)=(y_1,\ldots,y_n,\sqrt{1-\|y\|^2})$, 则 $g=f^{-1}$ 也是映射，因此 $S^n_+\cong E^n$. 同样 $S^n_-\cong E^n$

例 4.10 R^2 内圆周, 正方形边界, 三角形边界彼此同胚.

开集，内部，闭集，闭包和点列的收敛性都是拓扑变换下不变的，即若 $f\colon X\cong Y$, 则 U 是 X 的开集，当且仅当 $f(U)$ 是 Y 的开集，如此等等. 若映射 $f\colon X\to Y$ 将 X 的每个开(闭) 集映射成 Y 的开 (闭) 集，称 f 为 开 (闭) 映射. 显然 f 是同胚 $\iff$ f 是既单又满的开 (闭) 映射.

如果 $f: X \to Y$ 是映射使 $f: X \cong f(X)$, 称 f 为 嵌入. 我们常把 X 和 $f(X)$ 等同起来, 从而把 X 看作 Y 的子空间.

命题 4.11 设 $f: X \to Y, g: Y \to X$ 均为映射且 $gf = 1_X$ 则 f 是嵌入. 更进一步若 $fg = 1_Y$, 则 f 是同胚 (习题).

习 题

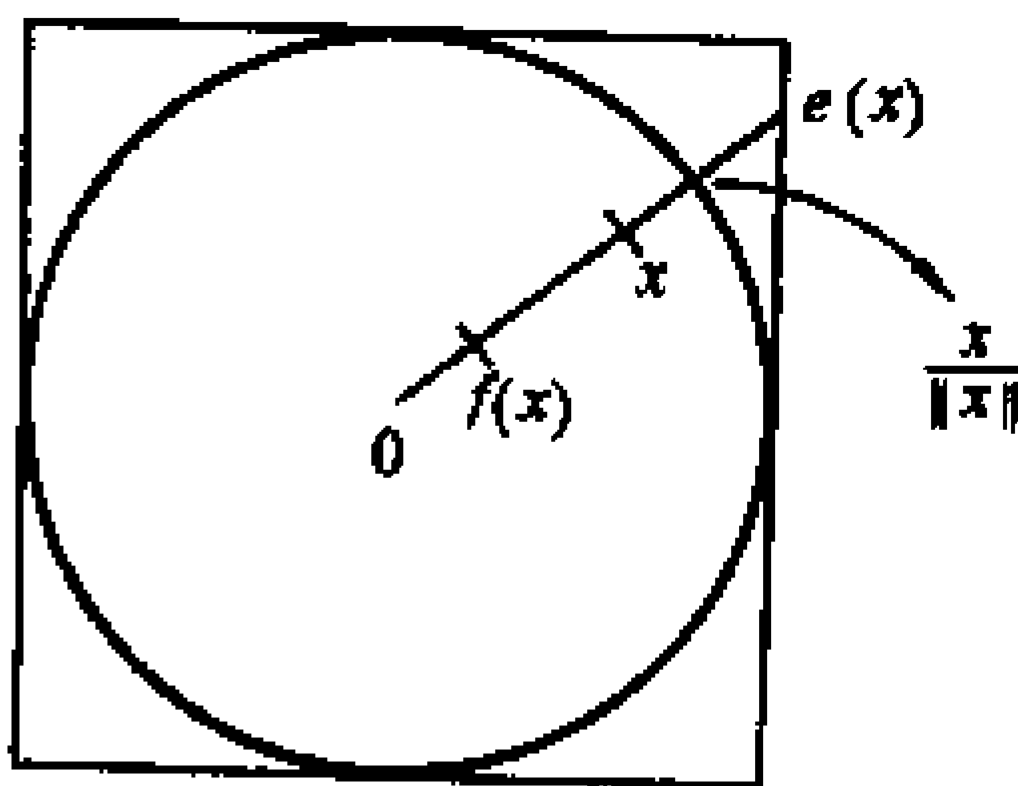
1. 设 A 为度量空间 (X, ρ) 的子集, $f: X \to R^1$ 定义为 $f(x) = \rho(x, A), x \in X$. 证明: f 是映射.

2. 若 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ 为集 X 上的两个拓扑, 则恒等对应 $1_X: (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ 连续, $\iff \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

3. 设 $f: X \to R$ 为函数, 证明: f 是连续的当且仅当存在 R 的某个稠密子集 A, 使对任意 $a \in A$, $f^{-1}((-\infty, a))$, $f^{-1}((a, +\infty))$ 为开集.

4. 试对开集叙述粘接引理并证之.

5. 设 $J^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \mid -1 \leq x_i \leq 1\}$, 且 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in J^n \setminus 0$, 令 $e(x) = \frac{1}{\max_{1 \leq i \leq n}\{|x_i|\}} x$. 证明: $e: J^n \setminus 0 \to J^n$ 连续, 且 $e(J^n \setminus 0)$ 为正方体 J^n 的边界. 更进一步证明 $J^n \cong E^n$.(提示: 令 $f: J^n \to E^n, f(x) = \frac{x}{\|e(x)\|}$, 当 $x \in J^n \setminus 0$ 而 $f(0) = 0$, 证明 f 连续且 f^{-1} 连续).



6. 证明: $I^n \cong J^n$

7. 利用适当的拓扑不变性质证明以下 X 与 Y 不同胚.

(a) $X = R, Y =$ 有理数集.

(b) $X = R$ 通常拓扑, $Y = R$ 有限余集拓扑.

8. 证明：若对 X 的每个子集 A 有 $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$，则 $f: X \to Y$ 是闭映射．叙述对于开映射的相应结论．

9. 设 $f: X \to Y, g: Y \to X$ 均为嵌入．证明： X 与 Y 可以写成无交并集 $X = X_1 \bigcup X_2, Y = Y_1 \bigcup Y_2, X_1 \bigcap X_2 = \phi = Y_1 \bigcap Y_2$，且使 $f|_{X_1}: X_1 \cong Y_1, g|_{Y_2}: Y_2 \cong X_2$．

10. 证明：由 $f(x,y) = (x, |y|), (x,y) \in R^2$ 定义的折叠映射 $f: R^2 \to R^2$ 是闭映射，但不是开映射．

§5 紧致性

数学分析的实数理论中， Heine-Borel-Lebesgue 定理指出，任一闭区间 $[a,b]$ 的任意开覆盖必有一个有限子覆盖．这个性质是拓扑性质，在拓扑学及其他数学分支所涉及的空间中都具有相当普遍的意义．这就是本节将介绍的所谓紧致性．

设 A 是空间 X 的子集， $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ 是 X 的一个子集族使 $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$，则称 $\mathcal{U}$ 为 A 在 X 中的 *覆盖*．若对每个 $U_\alpha \in \mathcal{U}, U_\alpha$ 都是 X 的开集，称 $\mathcal{U}$ 为 A 在 X 中的 *开覆盖*．若 $\mathcal{U}$ 只有有限个成员，称 $\mathcal{U}$ 为 A 在 X 中的 *有限覆盖*．若子集族 $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ 称 $\mathcal{U}_0$ 为 $\mathcal{U}$ 的 *子覆盖*．如果明确所讨论的是空间 X，“在 X 中”可省略．

例 5.1　对任意拓扑 $(X, \mathcal{T}), \mathcal{T}$ 是 X 的开覆盖，它的拓扑基 $\mathcal{B}$ 也是 X 的开覆盖．

例 5.2　设 $X = R, A = [0,1]$，对 $x \in A$，令 $0 < \epsilon_x < \max(x, 1-x)$ 则 $\mathcal{U} = \{x - \epsilon_x, x + \epsilon_x) \mid 0 \le x \le 1\}$ 是 A 在 X 中的开覆盖，但不是 A 在 A 中的开覆盖．因为 $(-\epsilon_x, \epsilon_x)$ 不是 A 的子集， $\mathcal{U}$ 不是 A 的子集族．

定义 5.3　若空间 X 的任何开覆盖 $\mathcal{U}$，都有一个有限子复盖 $\mathcal{U}_0$，则 X 称为 *紧致拓扑空间*．

定义 5.4　A 是任意空间 X 的子集，若 A 作为子空间是紧致空间，则 A 称为空间 X 的紧致子集．

紧致子集的这个定义牵涉到 A 的子空间拓扑，用起来很不方便. 以下命题比上述定义更便于应用.

命题 5.5 设 A 为空间 X 的子集，则 A 是 X 的紧致子集 $\Longleftrightarrow$ A 在 X 中的任何开覆盖都有有限子覆盖.

证：必要性. 设 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$ 为 A 在 X 中的开覆盖，则 $\mathcal{U}|_A=\{U_\alpha\bigcap A\}$ 为 A 的覆盖，且 $U_\alpha\bigcap A$ 都是子空间 A 的开集. 由定义 5.4, 存在有限子覆盖 $\{U_{\alpha_1}\bigcap A,\dots,U_{\alpha_n}\bigcap A\}$, 即

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}(U_{\alpha_i}\bigcap A)$$

因此，$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}$ 即 $\{U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}\}$ 为 A 在 X 中的有限子覆盖.

充分性. 设 $\mathcal{V}=\{V_\alpha\}$ 为子空间 A 的开覆盖, 即每个 V_α 为 A 的开集. 故有 X 的开集 U_α 使 $V_\alpha=U_\alpha\bigcap A$. 易知 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$ 为 A 在 X 中的开覆盖，由设存在有限子覆盖 $\{U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}\}$, 即 $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}$, 因此 $A=\bigcup_{i=1}^{n}(U_{\alpha_i}\bigcap A)=\bigcup_{i=1}^{n}V_{\alpha_i}$, A 为紧子空间.

下面是在数学分析中已讨论过的定理.

定理 5.6 (Heine-Borel-Lebesgue) 实直线 R 上任意闭区间 $[a,b]$ 是紧致子集.

下面是紧致空间或空间的紧致子集的一些基本性质.

命题 5.7 紧致空间的连续映射象仍是紧致的. 特别的，紧致性是拓扑不变的.

证：设 X 紧致，$f\colon X\to Y$ 为映射. 我们要证明 X 在 f 下的象集 $f(X)$ 是 Y 的紧致子集. 设 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$ 为 $f(X)$ 在 Y 中的开覆盖，易知 $f^{-1}\mathcal{U}=\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ 是 X 的开覆盖. 由 X 紧，$f^{-1}\mathcal{U}$ 有有限子覆盖 $\{f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_1}),\dots,f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_n})\}$, 因此 $\{U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}\}$ 是 $f(X)$ 在 Y 中的开覆盖，是 $\mathcal{U}$ 的有限子覆盖.

命题 5.8 紧致空间的闭子集总是紧致的.

证：设 F 为紧致空间 X 的闭集，$\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$ 为 F 在 X 中的开覆盖. 令 $\mathcal{U}'=\mathcal{U}\bigcup\{X\backslash F\}$, 则 $\mathcal{U}'$ 是 X 的开覆盖. 由 X 紧, 因此 $\mathcal{U}'$ 有有限子覆盖 $\{U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_n},X\backslash F\}$, 即 $\bigcup_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}\cup(X\backslash F)=X$ 由此 $\{U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_n}\}$ 应覆盖 F, F 是 X 的紧子集.

定理 5.9 (Bolzano-Weierstrass) 紧空间 X 的无穷子集必有聚点.

证：设 X 为紧空间，A 为任意没有聚点的子集，我们证明 A 是有限子集. 因为 A 无聚点，则 $\overline{A}=A, A$ 是 X 的闭集. 由命题 5.8,A 是紧致子集. 任 $a\in A, a$ 不是 A 的聚点，则存在 a 的邻域 U_a, 使 $U_a\cap A=\{a\}.\{U_a\}_{a\in A}$ 为 A 在 X 中的开覆盖，有有限子覆盖 $\{U_{a_1},\ldots,U_{a_n}\}$, 因此 $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ 是有限集.

下面讨论具有某种分离性条件的特殊拓扑空间的紧致性.

定义 5.10　若空间的任意二点有不相交的邻域, 则称空间为 T_2 空间, 或 Hausdorff 空间. (这个分离性质也叫 T_2 公理).

定义 5.11　若空间的任意两个不相交闭集总有不相交邻域，称空间为 T_4 空间 或 *正规空间*. (这个分离性质也叫 T_4 公理).

在这里我们不详细讨论 T_1,T_3 公理和它们的性质. 正规*空间*还有如下的等价定义.

命题 5.12　空间 X 是正规的 $\Longleftrightarrow$ X 的每个闭集 F 的任意邻域包含有 F 的一个邻域的闭包.

证：必要性. 设 $U\supset F$ 为闭集 F 的一个邻域，则 F 与 $G=X\backslash U$ 为不相交闭集. 由正规的定义存在开集 $V(F)\supset F$, $V(G)\supset G$ 使 $V(F)\cap V(G)=\phi$. 则有

$$\overline{V(F)}\subset\overline{X\backslash V(G)}=X\backslash V(G)\subset X\backslash G=U$$

充分性. 设 F,G 为 X 的不相交闭集，则 $X\backslash G\supset F$ 为 F 的一个邻域. 由充分性假设，存在 F 的邻域 V 使 $\overline{V}\subset X\backslash G$,

于是 $X\backslash\overline{V}\supset G$, 且 $V\cap(X\backslash\overline{V})=\phi$,$X$ 满足 T_4 公理.

度量空间 (X,ρ) 一定是 Hausdorff 空间. 因为 X 的任意二点 a,b 总有 $\rho(a,b)>0$. 取 $\epsilon<\frac{1}{2}\rho(a,b)$, 则球形邻域 $B(a,\epsilon)$ 和 $B(b,\epsilon)$ 互不相交. 度量空间也是正规空间. (习题)

Hausdorff 空间是满足 T_2 公理的拓扑空间, 这种空间已足够广泛. 代数拓扑学中涉及的大多数空间都是 Hausdorff 空间, 下面讨论其中的紧致性.

命题 5.13 Hausdorff 空间的紧致子集总是闭集.

证: 设 A 为 Hausdorff 空间 X 的紧子集. 任取 $x\in X\backslash A$, 则对任意 $y\in A,y\neq x$, 由 T_2 公理, 存在不相交开集 U_y,V_y 使 $x\in U_y,y\in V_y$. 现在 $\mathcal{V}=\{V_y\}_{y\in A}$ 是 A 在 X 中开覆盖, 因 A 紧故有有限子覆盖, $A\subset\cup_{i=1}^{n}V_{y_i}$. 令 $V=\cup_{i=1}^{n}V_{y_i},U=\cap_{i=1}^{n}U_{y_i}$, 则易见 $x\in U,A\subset V$, 且 $U\cap V=\phi$, 因此 x 是 $X\backslash A$ 内点. 由 x 任意性, $X\backslash A$ 为 X 的开集从而 A 是 X 的闭集.

命题 5.14 Hausdorff 空间任意两个不相交紧子集有不相交邻域.

证: 设 A,B 为 Hausdorff 空间 X 不交紧集, 由命题 5.13 的证明中已得, 对任 $b\in B$, 存在不交开集 U_b 和 V_b 使 $b\in V_b,A\subset U_b,\mathcal{V}=\{V_b\}_{b\in B}$ 为 B 在 X 中开覆盖, 有有限子覆盖 $\{V_{b_1},\cdots,V_{b_n}\}$. 令 $V=\cup_{i=1}^{n}V_{b_i},U=\cap_{i=1}^{n}U_{b_i}$, 则 $U\cap V=\phi,A\subset U,B\subset V$.

命题 5.15 紧 Hausdorff 空间的子集是紧的 $\Longleftrightarrow$ 它是闭的.

定理 5.16 紧 Hausdorff 空间是正规空间.

证: 这是命题 5.14, 5.15 的推论.

以下是定义在紧空间 X 上的映射 f 是否同胚的较好判别法.

定理 5.17 紧空间 X 到 Hausdorff 空间 Y 的既单又满的映射一定是同胚.

证: 设 F 为 X 的闭集, 由命题 5.8,F 是 X 紧子集. 由

命题 5.7,$f(F)$ 是 Y 紧子集，由命题 5.13,$f(F)$ 是 Y 闭子集. 因此 f 是既单又满的闭映射，由命题 4.11 前的叙述，f 是同胚.

度量空间中的以下性质是数学分析中结果的自然推广.

命题 5.18 度量空间 (X,ρ) 的紧子集 A 总是有界闭集.

证：因为度量空间是 Hausdorff 空间，由命题 5.13,A 是 X 的闭集. 为证明 A 的有界性，取球形邻域族 $\{B(a,1)\}_{a\in A}$, 这是 A 在 X 中的开覆盖，因此有有限子覆盖 $\{B(a_1,1),\ldots,B(a_n,1)\}$. 令 $d=\max_{1\le i,j\le n}\{\rho(a_i,a_j)\}$, 则对任意 $x,y\in A$, 有 i,j 使得 $x\in B(a_i,1),y\in B(a_j,1)$. 于是 $\rho(x,y)\le\rho(x,a_i)+\rho(a_i,a_j)+\rho(a_j,y)<d+2$, 可见 A 的直径 $\mathrm{diam}(A)\le d+2$, 即 A 有界.

注意上述命题的逆不成立. 例如取 $X=[0,1)$ 作为 R 的子空间，X 为度量空间. $X=[0,1)$ 是 X 的有界闭集，但不是紧致的. 如果 X 是紧致度量空间，由命题 5.8,A 紧 $\Longleftrightarrow$ A 有界闭集.

推论 5.19 紧空间 X 到 R 上的连续函数均有界，且能在 X 上的点达到最大值和最小值.

Lebesgue 引理 5.20 设 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$ 是紧度量空间 (X,ρ) 的开覆盖，则存在正数 λ(称为开覆盖 $\mathcal{U}$ 的 Lebesgue 数), 使 X 中任意直径小于 λ 的子集 A 必包含于 $\mathcal{U}$ 的某个成员 U_α 中.

证：用反证法. 设不存在这样的正数 λ, 则可找到 X 的一序列子集 $A_1,\ldots,A_n,\ldots$, 使 $\mathrm{diam}(A_n)<\frac{1}{n}$, 而且 A_n 都不包含于 $\mathcal{U}$ 中任一成员. 在 A_n 中任取一点 x_n, 若点列 $\{x_n\}$ 只有有限个不同的点，则有无限个点都等于 a, 若 $\{x_n\}$ 有无限个不同的点，由定理 5.9, 无穷子集 $\{x_n\}$ 有聚点，也记为 a. 这时 $\{x_n\}$ 存在子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使收敛于点 a, 设 $a\in U_{\alpha_0}$, 某个 $\mathcal{U}$ 的成员 U_{α_0}, 则存在球形邻域 $B(a,\epsilon)\subset U_{\alpha_0}$, 取充分大的正整数 m 使 $\mathrm{diam}(A_m)<\frac{\epsilon}{2},x_m\in B(a,\frac{\epsilon}{2})$, 则当 $x\in$

$A_m, \rho(x,a) \le \rho(x,x_m) + \rho(x_m,a) < \mathrm{diam}(A_m) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, 因此 $x \in B(a,\epsilon) \subset U_{\alpha_0}$, 即 $A_m \subset U_{\alpha_0}$, 矛盾.

定理 5.21 紧致度量空间 (X,ρ) 到度量空间 (X',ρ') 的映射 f 总是 *一致连续的*, 即对任意正数 ϵ, 存在不依赖于 x,y 的正数 δ, 使 $\rho(x,y) < \delta \Longrightarrow \rho'(f(x),f(y)) < \epsilon$.

证: 因为 f 在 x 点连续, 对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta_x > 0$, 使 $f(B(x,\delta_x)) \subset B'(f(x),\frac{\epsilon}{2})$, 因 X 紧, 由 Legesgue 引理, X 的开覆盖 $\{B(x,\delta_x)\}_{x\in X}$ 有 Legesgue 数 $\delta > 0$. 当 $x,y \in X$ 使得 $\rho(x,y) < \delta$, 则 x,y 同属于开覆盖的某个成员 $B(x_0,\delta_{x_0})$, 于是 $\rho'(f(x),f(y)) < \rho'(f(x),f(x_0)) + \rho'(f(x_0),f(y)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

习　题

1. 证明: 空间的有限子集总是紧致的.

2. 闭集族 $\{F_\alpha\}$ 称为具有 *有限交性质*, 如果族中任意有限个成员都有非空的交. 证明: X 紧致 $\Longleftrightarrow$ X 的每个具有有限个交性质的闭集族 $\{F_\alpha\}$, 其全体成员有非空的交.

3. 证明: (1) 空间中有限个紧致子集的并集仍紧致.

(2) 空间中任意多个紧致闭集的交仍是紧致闭集.

(3) Hausdorff 空间中任意多个紧子集的交仍紧致.

4. A 为度量空间 (X,ρ) 的紧子集, $x \in X$. 证明: 存在一点 $a \in A$ 使 $\rho(x,A) = \rho(x,a)$.

5. 证明: 度量空间 X 中子集 A 的直径满足 $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.

6. 证明: Hausdorff 空间的子空间还是 Hausdorff 空间. 由此推出紧空间到 Hausdorff 空间的单映射是嵌入.

7. 证明: 度量空间是正规的.

8. 证明: 正规空间的闭子空间是正规的.

9. 空间 X 称为 *局部紧的*, 如果对 X 的每点 x 的每个邻域 U, 存在 X 的紧邻域 V 使 $V \subset U$, 证明下列空间局部紧.

(a) R^n;　　(b) 紧致 Hausdorff 空间;　　(c) 离散空间.

10. 设 $(X,\mathcal{T})$ 为局部紧 Hausdorff 空间但不紧致，∞ 为不属于 X 的一点，令 $X_* = X\cup\{\infty\}, \mathcal{T}_* = \mathcal{T}\cup\{X_*\}\cup\{X_*\backslash K \mid K$ 为X 紧集$\}$ 为 X_* 的子集族，验证 $(X_*,\mathcal{T}_*)$ 为紧致 Hausdorff 空间，且 X 是 X_* 稠密子集，X_* 称为 X 的 一点紧致化.

11. 证明：R^n 的一点紧致化同胚于 S^n.

12. 设 $\epsilon > 0$, 度量空间 X 的有限子集 A 称为 X 的 ϵ- 网，若 X 中每点到 A 的距离都小于 ϵ, 证明：紧度量空间对每个 $\epsilon > 0$ 有 ϵ- 网.

§6 连通性

Hausdorff 空间 X 具有的分离性质 (即 T_2 性质) 是 X 的局部结构. 在本节我们将引进关于 X 的整体结构 — 连通性，即整个空间能否被分离成两块的问题.

定义 6.1 若拓扑空间 X 是它的两个非空的不相交的开集 A 与 B 的并集，称 X 为 非连通 拓扑空间，否则是 连通 拓扑空间. 若 $X = A\cup B$ 如上述，A 与 B 叫做 X 的一个 分解.

实际上，若 X 有上述分解 A 与 B 则 A,B 是一对 分离子集, 即 $(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) = \phi$(或者 $\overline{A}\cap B = \phi$ 且 $A\cap\overline{B} = \phi$), 我们有

定理 6.2 对拓扑空间 X, 下列断语彼此等价：

(1) X 不是一对分离子集的并集.

(2) X 是连通的.

(3) X 不是非空的两个不相交的闭集的并.

(4) X 中只有 X,ϕ 既开又闭.

(5) 对任映射 $f: X \to R, f(X) \neq \{0,1\}$.

证：(1) $\Longrightarrow$ (2). 设 $X = A\cup B, A, B$ 为 X 的两个非空不相交开集. 因此 $X\backslash A = B$ 是闭集，$A\cap\overline{B} = A\cap B = \phi$. 同理 $\overline{A}\cap B = \phi$, 因此 X 是一对分离子集 A 与 B 的并，与 (1) 矛盾.

(2)$\Longrightarrow$(3)$\Longrightarrow$(4) 是显然的.

(4)$\Longrightarrow$(5). 设 $f(X)=\{0,1\}$, 令 $U=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}), V=(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$. 则 $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ 是 X 的两个非空开集, 且 $f^{-1}(V)=X\backslash f^{-1}(U)$ 是闭集, 与 (4) 矛盾.

(5)$\Longrightarrow$(1) 设 $X=A\cup B, A, B$ 为一对分离子集, 则 $A=X\backslash B$ 是一个开集. 证明如下: 因为 $A\cap\overline{B}=\phi$, 任 $a\in A$, 有 a 在 X 中的邻域 U 使 $U\cap B=\phi$(不然 $a\in\overline{B}$ 矛盾), 因此 $U\subset A$, a 为 A 的内点. 因此 A 是开集. 同样的 B 是开集, 容易证明 A, B 都是闭集. 定义 $f: X\to R$ 为 $f(A)=0, f(B)=1$, 则由粘接引理 4.5, f 是映射使 $f(X)=\{0,1\}$ 与 (5) 矛盾.

例 6.3 实直线 $R=(-\infty,+\infty)$ 是连通空间.

证: 设 $R=A\cup B, A$ 与 B 为一对分离子集. 任取 $a\in A, b\in B$, 不妨设 $a<b$, 令 $A_1=A\cap[a,b], B_1=B\cap[a,b]$. A_1 有上界, 故有上确界 $s\leq b$ 且 $s\in\overline{A_1}\subset\overline{A}$. 因 $\overline{A}\cap B=\phi$, 故 $s<b$. 现在因 $A\cap\overline{B}=\phi$, 故 $R=A\cup\overline{B}$, 从而 $\overline{B}=B$. 易知 $(s,b]\subset B$(由 s 为 A_1 上确界), 我们得 $s\in\overline{(s,b]}\subset\overline{B}=B$, 即 $s\in\overline{A}\cap B$ 矛盾.

下面讨论空间中子集的连通性及其基本性质.

定义 6.4 空间 X 的子集 A 称为 X 的 连通子集, 若 A 作为子空间是连通的.

R 的子集 $\{0,1\}$ 显然是不连通的. 有理点集和无理点集也是不连通的 (复习题). 实际上 R 的含有两点以上的子集 A 是连通的当且仅当 A 是开, 闭, 或半开半闭区间 (习题).

命题 6.5 连通空间的连续象是连通集, 特别地, 连通性拓扑不变.

证: 作为 Y 的子空间, X 的在映射 $f: X\to Y$ 之下的象 $f(X)$ 也是拓扑空间, 因此 $f: X\to f(X)$ 也是映射. 设 $f(X)$ 非连通, 则 $f(X)=A\cup B, A$ 与 B 是 $f(X)$ 的非空不相交开集. 因此 $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ 也是 X 的非空不相交开集且 $X=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$, 因此 X 非连通.

推论 6.6(中值定理) 设 X 连通, $f: X \to R$ 为连续函数, 则对 $f(x_0) < c < f(x_1)$, 存在 X 的一点 x 使 $f(x) = c$.

证: $R \backslash \{c\} = (-\infty, c) \cup (c, +\infty)$ 显然不连通, 且 $f(x_0) \in (-\infty, c)$, $f(x_1) \in (c, +\infty)$. 设 $c \notin f(X)$, 则

$$f(X) = (f(X) \cap (-\infty, c)) \cup (f(X) \cap (c, +\infty))$$

$f(X)$ 是 $f(X)$ 的非空不相交开集的并, 与命题 6.5 矛盾.

下面的命题就是说, 连通子集 Y 的闭包 $\overline{Y}$ 仍连通.

命题 6.7 设 Y 是空间 X 的连通子集且 $Y \subset Y_1 \subset \overline{Y}$, 则 Y_1 也是连通的, 特别的 $\overline{Y}$ 连通.

证: 设 Y_1 不连通, 由定理 6.2(5), 有连续函数 $f: Y_1 \to R$ 使 $f(Y_1) = \{0, 1\}$. 因 Y 连通, $f(Y)$ 只能是独点集, 不妨设 $f(Y) = \{0\}$. 令 $U_1 = f^{-1}((\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$, 则 U_1 是 Y_1 的非空开集, 存在 X 的开集 U 使 $U_1 = U \cap Y_1$. 因为 $f(U_1) = \{1\}$, 则 $U_1 \cap Y = \phi$. U_1 含有 Y 在 X 中一个聚点 $y_1 \in Y_1 \backslash Y$(根据假设) 且 $y_1 \in U$. 由聚点定义, $U \cap Y$ 非空, 从而 $U_1 \cap Y \supset U \cap Y$ 含有一点 y, 产生矛盾.

定理 6.8 设空间 X 有一个由连通子集组成的覆盖 $\mathcal{U}$, 使 $\mathcal{U}$ 的任意两个成员 A, B, 存在 $\mathcal{U}$ 的有限个成员 $A = A_1, A_2, \ldots$, $A_n = B$, 使 $A_i \cap A_{i+1} \neq \phi (i = 1, 2, \ldots, n-1)$, 则 X 连通.

证: 设 X 不连通, 则 $X = U \cup V$, 其中 U 和 V 是不相交的既开, 且闭子集. 因为 $\mathcal{U}$ 是 X 的覆盖, 则存在 $\mathcal{U}$ 的成员 A, B 使 $A \cap U \neq \phi, B \cap V \neq \phi$, 由设, 存在 $\mathcal{U}$ 的成员 $A = A_1, A_2, \ldots, A_n = B$ 使 $A_i \cap A_{i+1} \neq \phi$. 现证明 $B = A_n \subset U$, 从而 $U \cap V \neq \phi$ 矛盾. 实际上还可以证明对每个 $i, A_i \subset U$. 因为 A_1 连通, 且 A_1 与 X 的既开且闭子集 U 的交非空, 因此 $A_1 \cap U$ 是 A_1 的既开且闭子集. 由命题 6.2(4), $A_1 \cap U = A_1$, 即 $A_1 \subset U$. 设对 $1 \leq i \leq n$ 有 $A_i \subset U$, 则 $\phi \neq A_i \cap A_{i+1} \subset U \cap A_{i+1}$, 同上理可知 $A_{i+1} \subset U$, 完成了归纳法.

现在我们讨论空间 X 的极大连通子集，即 X 的连通分支.

定义 6.9 设 A 是空间 X 的连通子集，且不是别的连通集的真子集，称 A 为 X 的 *极大连通子集* 或 *连通分支*.

命题 6.10 X 的连通分支是闭集，不同连通分支互不相交，且 X 是它的所有连通分支的并集.

证：设 C 为 X 的连通分支，由命题 6.7,$\overline{C}$ 连通．但 C 是极大连通子集．故 $\overline{C} \subset C$, 从而 $\overline{C} = C$, C 是闭集．设 C 与 D 是 X 的两个不同的连通分支，而 $C \cap D \neq \phi$, 则由定理 6.8,$C \cup D$ 连通，与 C 的极大性矛盾，因此 $C \cap D = \phi$.

下面讨论比连通性更强的道路连通性.

定义 6.11 映射 $f: I \to X$ 使 $f(0) = a, f(1) = b$, 称为 X 中连接 a 与 b 的 *道路*. 如果对于空间 X 任意二点 a, b 都有一条连接它们的道路，称 X 是 *道路连通的*.a 点叫道路 f 的 *起点*,b 点叫 *终点*.

我们常在直观上将 $f(I) \subset X$ 看作道路，但必需注意，道路指的是映射 f, 而不是它的象集 $f(I)$.

例 6.12 欧氏空间 R^n 的子集 X 叫 *凸集*, 若对任意 $x, y \in X$, 由 x, y 连接成的闭线段整个包含在 X 中． R^n 有线性空间结构，因此存在闭线段 $[x, y] = \{(1-t)x + ty \mid 0 \leq t \leq 1\}$. 显然凸集 X 是道路连通的，因为 $f: I \to X, f(t) = (1-t)x + ty$ 是映射，而 $f(0) = x, f(1) = y$.

命题 6.13 道路连通空间的连续象仍道路连通．特别地，道路连通性是拓扑不变的.

证：设 X 道路连通， $f: X \to Y$ 为映射，则 $f: X \to f(X)$ 仍是映射．对 $f(a), f(b) \in f(X)$, 设 $u: I \to X$ 为道路使 $u(0) = a, u(1) = b$, 则 $fu: I \to f(X)$ 为道路，使 $fu(0) = f(a), fu(1) = f(b)$.

空间 X 的子集 A 叫 *道路连通子集*, 若 A 作为子空间是道路连通的．若 A 是 X 的道路连通子集，又不是别的道路连

通子集的真子集，称 A 为 **极大道路连通子集** 或 **道路连通分支**. 容易证明

命题 6.14 每个空间是其互不相交道路连通分支的并集.

后面的例 6.16 说明道路连通分支不一定是闭集，这和连通分支不同 (见命题 6.10). 下面讨论道路连通性与连通性的关系.

命题 6.15 道路连通空间一定是连通的.

证：设道路连通空间 X 不连通，则 $X = A \cup B, A \cap B = \phi$. 取 $a \in A, b \in B$, 存在 X 中道路 $f: I \to X$, 使 $f(0) = a, f(1) = b$, 因此有 $f(I) \subset A \cup B = X, f(I) \cap A \neq \phi, f(I) \cap B \neq \phi$, 而且 $f(I) \cap A \cap B = \phi$. 这就是说 $f(I)$ 有分解 $f(I) = (f(I) \cap A) \cup (f(I) \cap B)$, 即 $f(I)$ 不连通，但是 I 连通，由命题 6.5, $f(I)$ 连通，产生矛盾.

例 6.16 连通空间未必道路连通. 设

$$A = \{(0, y) \in R^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

$$B = \{(x, \sin \frac{\pi}{x}) \in R^2 \mid 0 < x \leq 1\}$$

$$X = A \cup B$$

都是作为 R^2 的子空间. 我们说明 X 是连通的，但不道路连通. 首先 B 是道路连通的，因为 $(1, 0)$ 和 $(1 - a, \sin \frac{\pi}{1-a})$ 可由道路 $u: I \to B, u(t) = (1 - at, \sin \frac{\pi}{1-at})$ 所连接. 因此 B 是连通的，且 $X = A \cup B \subset \overline{B}$, 因此由命题 6.7, X 连通.

另一方面，X 不是道路连通的，不然若存在 X 中由 $(0, 0)$ 到 $(1, 0)$ 的道路 u, 记 $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$. 现在 $u^{-1}(A)$ 是 I 的含有 0 的闭集，因此也包含有它的上确界 $b, 0 < b < 1$. 我们将证明 u_2 在 b 点不连续.

设 $u_2(b) \leq 0$, 则对任 $\delta > 0$ 使 $b + \delta \leq 1$ 有 $u_1(b + \delta) > 0$, 从而存在正整数 n 使 $0 = u_1(b) < \frac{2}{4n+1} < u_1(b + \delta)$, 并且存在 t 使得 $b < t < b + \delta$, 且 $u_1(t) = \frac{2}{4n+1}$，因此 $u_2(t) = \sin \frac{\pi}{u_1(t)} =$

1, $u_2(t)-u_2(b)\geq 1, u_2$ 在 b 点不连续. 当 $u_2(b)\geq 0$, 类似可证 u_2 在 b 点不连续. 因此不存在这样的道路 u, X 道路不连通.

习　题

1. 试证：若实直线 R 的一个连通子集包含至少两点，则它必是一个区间. (开，闭，半开，有限或无穷).

2. 试证：欧氏空间 $R^n(n>1)$ 减去一点是连通的， n 维球面 $S^n(n>0)$ 是连通的.

3. 试证：若连通度量空间 X 包含至少两点，则存在映射 $f{:}X\to[0,1]$ 使 $f(X)=[0,1]$.

4. 若 A 与 B 是空间 X 的一对分离子集，且 $A\cup B$ 是 X 的开集 (或闭集), 则 A 与 B 都是 X 的开集 (或闭集).

5. 证明：空间 X 中既开又闭的连通子集是 X 的连通分支.

6. 证明：平凡拓扑空间一定道路连通.

7. 利用连通性证明 R 和 $R^n(n>1)$ 不同胚.

8. 证明 1 维的 Brouwer 不动点定理：任映射 $f{:}I\to I$ 都存在不动点，即存在 $x\in I$, 使 $f(x)=x$.

9. 一维 Borsuk-Ulam 定理：若 $f{:}S^1\to R^1$ 是连续函数，则存在一点 $z\in S^1$, 使 $f(z)=f(-z)$.

10. 空间 X 叫做 *局部连通* 的，若对任意 $x\in X$ 和 x 的任意邻域 U_x, 存在 x 的连通邻域 V_x 使 $V_x\subset U_x$, 证明：

(1) 局部连通性拓扑不变，但不一定被连续映射保持.

(2) X 是局部连通空间，当且仅当 X 的任意开集的连通支是开集.

11. 空间 X 叫做 *局部道路连通* 的，若对任意 $x\in X$ 和 x 的任意邻域 U_x, 存在 x 的道路连通邻域 V_x, 使 $V_x\subset U_x$. 证明：(1) 局部道路连通空间是局部连通的.

(2) 局部道路连通空间的连通支和道路连通支是一致的.

12. 设 $Y = X_0 \bigcup \cup_{n=0}^{\infty} Y_n$, 其中 $X_0 = I \times \{0\}, Y_0 = \{0\} \times I$, 而 $Y_n = \{\frac{1}{n}\} \times I$ 都是 R^2 的子空间. 证明 Y 连通但不是局部连通.

§7 乘积空间

n 个拓扑空间 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 通过笛卡尔直积 $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ 可作出一个新的集合. 我们怎样利用每个 X_i 原有的拓扑结构来定义这个新集合上的拓扑呢？我们可以从欧氏空间 R^n 的通常拓扑得到启示, 因为 R^n 实际上是 n 个 R^1 的笛卡尔直积 $R^1 \times \ldots \times R^1$. 下面的命题给出了本节将要定义的乘积拓扑的一个背景.

命题 7.1 R^n 的子集族 $\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \mid U_i$ 是 R 的开集$\}$ 是欧氏空间 R^n(通常拓扑) 的一个拓扑基.

证: 只要证明 $\mathcal{B}$ 的每个成员是 R^n 通常拓扑的开集且 R^n 的每个球形邻域 $B(x, \epsilon)$ 是 $\mathcal{B}$ 中若干成员的并集.

设 $U_1 \times \ldots \times U_n \in \mathcal{B}, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U_1 \times \ldots \times U_n$. 因为 U_i 是 R 的开集, 存在 $\epsilon_i > 0$, 使开区间 $(x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i) \subset U_i$. 令 $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n\}$, 易证 $x \in B(x, \epsilon) \subset U_1 \times \ldots \times U_n$, 即 x 是 $U_1 \times \ldots \times U_n$ 内点, 从而 $U_1 \times \ldots \times U_n$ 是 R^n 通常拓扑的开集.

另外, 若 $B(x, \epsilon)$ 是 R^n 的球形邻域. 对任 $y = (y_1, \ldots, y_n) \in B(x, \epsilon)$, 存在 $\delta_y > 0$ 使 $B(y, \delta_y) \subset B(x, \epsilon)$. 令

$$U_i^y = (y_i - \frac{1}{\sqrt{n}}\delta_y, y_i + \frac{1}{\sqrt{n}}\delta_y), i = 1, 2, \ldots, n$$

则易见 $y \in U_1^y \times \ldots \times U_n^y \subset B(y, \delta_y) \subset B(x, \epsilon)$. 因此 $B(x, \epsilon) = \bigcup_{y \in B(x,\epsilon)} U_1^y \times \ldots \times U_n^y$, $B(x, \epsilon)$ 是 $\mathcal{B}$ 中若干成员的并集.

定义 7.2 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为拓扑空间, $X = X_1 \times \ldots \times X_n$. X 的子集族 $\mathcal{B} = \{U_1 \times \ldots \times U_n \mid U_i 为 X_i 的开集\}$ 满足

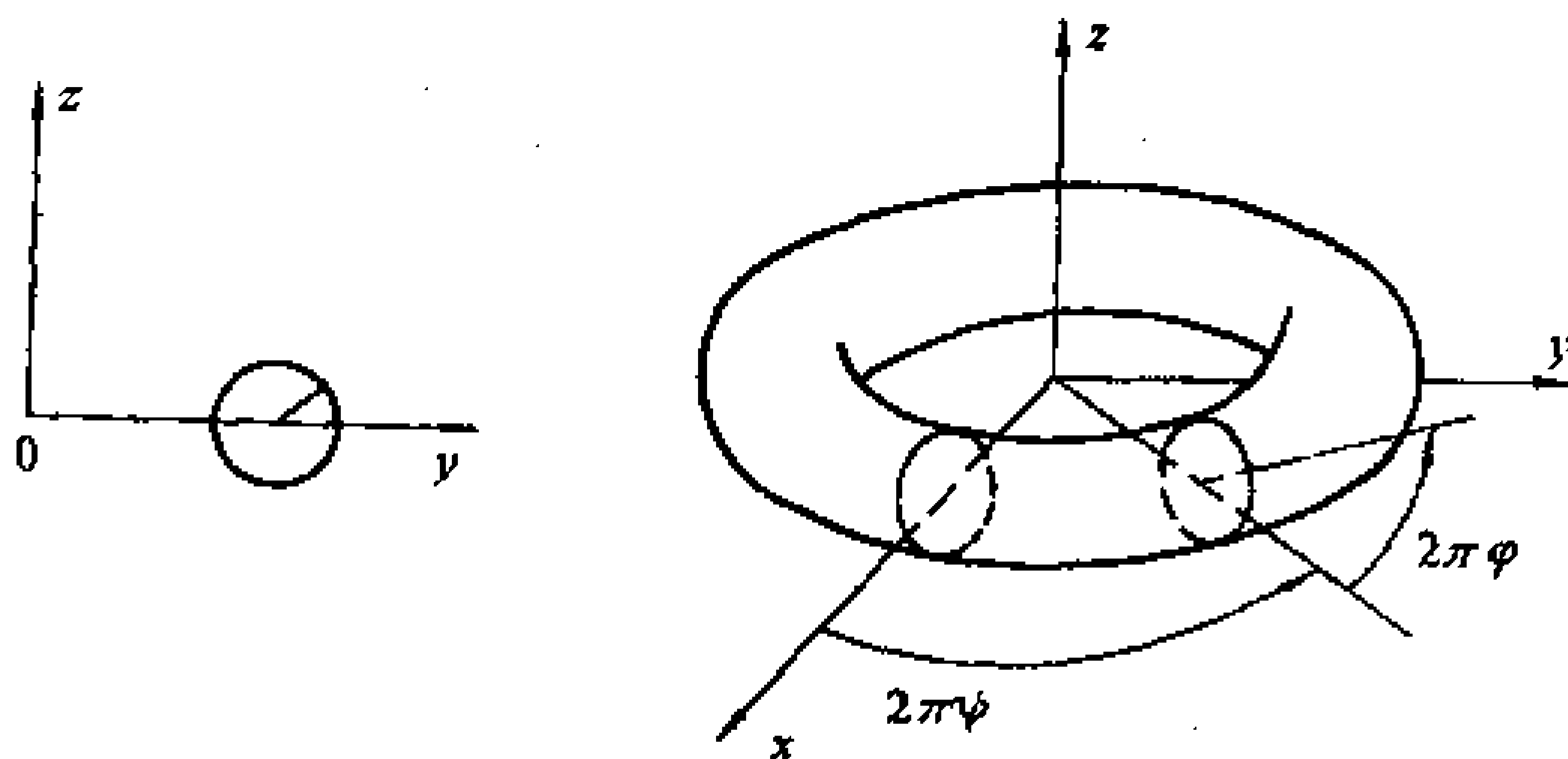
拓扑基的定义 2.6(复习题). 此拓扑基 $\mathcal{B}$ 诱导的拓扑 $\mathcal{T}$ (参见定理 2.9) 叫做 X 上的 乘积拓扑,$(X,\mathcal{T})$ 叫做 $X_1,\ldots,X_n$ 的乘积空间,X_i 叫做乘积空间 X 的第 i 个 因子空间.

例 7.3 欧氏空间 R^n 是 n 个 R^1 的乘积空间.

例 7.4 设 (X_i,ρ_i) 为度量空间, $i=1,2,\ldots,n$. $X=X_1\times\ldots\times X_n$. 定义 $\rho: X\times X\to R$ 为 $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\rho_i(x_i,y_i)^2}$, 利用 Schwarz 不等式可验证 ρ 是 X 上度量. 更进一步可以证明 (X,ρ) 的度量拓扑和 X 的乘积拓扑是等价的. (习题)

例 7.5 乘积空间 $S^1\times I$ 是以圆周 S^1 为准线, 以 I 为母线的圆柱面. 对一般拓扑空间 X, 通常将乘积空间 $X\times I$ 称为以 X 为底的柱面. $X\times\{0\}, X\times\{1\}$ 分别为柱面的下底和上底. 若 U 为 X 的开集, V 为 I 的开集, 则 $U\times V$ 是 $X\times I$ 的拓扑基中的开集, 而一般的 $X\times I$ 的开集是若干个 $U\times V$ 的并集.

例 7.6 在解析几何中, 环面是圆周绕在同一平面上的轴(但与圆周不相交) 旋转而得的旋转面, 即它是 R^3 的子空间. 例如 yz 平面上圆周 $(y-2)^2+z^2=1$ 绕 z 轴旋转而得的环面参数方程为



$$
\begin{aligned}
x &= (2+\cos(2\pi\varphi))\cos(2\pi\psi)\\
y &= (2+\cos(2\pi\varphi))\sin(2\pi\psi)\\
z &= \sin(2\pi\varphi)\quad 0\le\varphi,\psi\le 1
\end{aligned}
$$

但是在拓扑学中常将环面看作乘积空间 $S^1 \times S^1$. 实际上，环面作为如上所述的 R^3 的子空间和作为乘积空间是同胚的，我们将在 §8 中证明这个事实.

乘积空间的概念可以推广到无限个因子空间的乘积空间. 但在这里我们仍着重讨论有限个因子空间的情况. 首先我们讨论乘积空间中的连续性问题.

设 $p_j: X_1 \times \ldots \times X_n \to X_j, i_j: X_j \to X_1 \times \ldots \times X_n$, 定义为 $p_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ 和 $i_j(x_j) = (x_1^0, \ldots, x_j, \ldots, x_n^0)$, 其中 $x_k^0 (k \neq j)$ 为 X_k 中给定点. 称 p_j 为到第 j 个因子空间的 **投射** 而 i_j 称为第 j 个因子空间到乘积空间的 **内射**.

命题 7.7 投射 p_j 是满的开映射.

证: 设 U 为 X_j 的任一开集. 则 $p_j^{-1}(U) = X_1 \times \ldots \times U \times \ldots \times X_n$ 显然是 $X_1 \times \ldots \times X_n$ 中开集，故 p_j 是映射. p_j 显然是满的. 若 $U_1 \times \ldots \times U_n$ 为积空间的拓扑基中的开集，则 $p_j(U_1 \times \ldots \times U_n) = U_j$ 是 X_j 的开集，故 p_j 是开映射.

命题 7.8 i_j 是映射且将 X_j 嵌入为子空间 $\{x_1^0\} \times \ldots \times X_j \times \ldots \times \{x_n^0\}$. 因此我们常把 X_j 看作 $X_1 \times \ldots \times X_n$ 的子空间.

证: 容易验证 i_j 连续且 $p_j i_j = 1_{X_j}, i_j$ 是嵌入.

下面是判断到乘积空间的对应是否连续的重要判别法.

命题 7.9 对应 $f: Y \to X_1 \times \ldots \times X_n$ 连续当且仅当每个坐标对应 $p_j f: Y \to X_j$ 连续 $(j = 1, 2, \ldots, n)$

证: 必要性是显然的. 今设每个 $p_j f$ 连续. 对 X_j 的任一开集 $U_j, f^{-1}(U_1 \times \ldots \times U_n) = \cap_{j=1}^n f^{-1}(X_1 \times \ldots \times U_j \times \ldots \times X_n) = \cap_{j=1}^n f^{-1} p_j^{-1}(U_j) = \cap_{j=1}^n (p_j f)^{-1}(U_j)$. 因为 $p_j f$ 连续，$(p_j f)^{-1}(U_j)$ 是开集，从而 $f^{-1}(U_1 \times \ldots \times U_n)$ 也是 Y 的开集，故 f 连续.

命题 7.10 若 $f_i: X_i \to Y_i$ 为映射，则 $f_1 \times \ldots \times f_n: X_1 \times \ldots \times X_n \to Y_1 \times \ldots \times Y_n$ 也是映射. 由此还可得，若 $X_i \cong Y_i$, 则 $X_1 \times \ldots \times X_n \cong Y_1 \times \ldots \times Y_n$.(习题)

若任意有限个拓扑空间 $X_1,\ldots,X_n$ 具有性质 A 蕴含乘积空间 $X_1\times\ldots\times X_n$ 也有性质 A, 则性质 A 称为 **有限可积性质**. 下面是最基本的有限可积性质.

命题 7.11 $X_1\times\ldots\times X_n$ 是 Hausdorff 空间当且仅当每个因子空间 X_j 是 Hausdorff 空间.

证: 只要对 $n=2$ 证明, 剩下的可作归纳法. 设 $X_1\times X_2$ 是 Hausdorff 空间, 对 $x_1,x_1'\in X_1$ 为不同的二点, 任取 $x_2\in X_2$, 则 $(x_1,x_2),(x_1',x_2)$ 为 $X_1\times X_2$ 的不同点, 有不相交邻域, 从而可找到 $X_1\times X_2$ 的拓扑基中两个不相交的成员 $U_1\times U_2, U_1'\times U_2'$. 容易看出, U_1,U_1' 是 x_1,x_1' 在 X_1 中的不相交邻域, 即 X_1 是 Hausdorff 空间. 同理 X_2 也是.

反之, 设 X_1,X_2 都是 Hausdorff 空间, $(x_1,x_2),(x_1',x_2')$ 为 $X_1\times X_2$ 的两个不同点, 不妨设 $x_1\neq x_1'$, 因为 X_1 是 Hausdorff 空间, 则有 X_1 的不相交开集 U_1 和 U_1' 使 $x_1\in U_1, x_1'\in U_1'$. 因此 $U_1\times X_2, U_1'\times X_2$ 是 $(x_1,x_2),(x_1',x_2')$ 的不相交邻域.

命题 7.12 $X_1\times\ldots\times X_n$ 连通 (或道路连通) 当且仅当每个 X_j 连通 (或道路连通).

证: 因为 X_j 是在 $p_j: X_1\times\ldots\times X_n\to X_j$ 下的连续象, 故必要性显然成立. 反之, 若 X_1,X_2 连通, 因为

$$X_1\times X_2=(X_1\times\{x_2^0\})\bigcup\cup_{x\in X_1}\{x\}\times X_2$$

则 $\mathcal{U}=\{X_1\times\{x_2^0\},\{x\}\times X_2\}_{x\in X_1}$ 是 $X_1\times X_2$ 的连通子集组成的覆盖, 由定理 6.8, $X_1\times X_2$ 连通. 我们省略关于道路连通性情况的证明.

引理 7.13 设 $\mathcal{B}$ 为空间 X 的拓扑基. 若对任意由 $\mathcal{B}$ 的成员组成的开覆盖总有有限子覆盖, 则 X 紧致. (复习题).

定理 7.14 $X_1\times\ldots\times X_n$ 紧致当且仅当每个 X_j 紧致.

证: 因为 X_j 是在 $p_j: X_1\times\ldots\times X_n\to X_j$ 下的连续象, 故必要性成立. 反之, 设 X_1,X_2 紧致. 借助上述引理, 只须考虑 $X_1\times X_2$ 的任意开覆盖 $\mathcal{W}=\{U_\alpha\times V_\alpha\}$, 其中 U_α,V_α 分

别为 X_1, X_2 的开集. 我们证明 $\mathcal{W}$ 有有限子覆盖.

因为 $\{x\}\times X_2$ 同胚于 X_2, 是 $X_1\times X_2$ 的紧致子集, $\mathcal{W}$ 自然也是 $\{x\}\times X_2$ 在 $X_1\times X_2$ 中的开覆盖, 故有有限子覆盖

$$\{U_{\alpha,x}^{j}\times V_{\alpha,x}^{j}\}_{1\le j\le n_x}$$

令 $U_x=\cap_{j=1}^{n_x}U_{\alpha,x}^{j}$, 则 $U_x\times X_2$ 是 $X_1\times X_2$ 的开集且包含 $\{x\}\times X_2$.$\{U_x\}_{x\in X_1}$ 显然是 X_1 的开覆盖, 由 X_1 紧致, 有有限子覆盖 $\{U_{x_1}, U_{x_2},\ldots,U_{x_m}\}$. 于是 $X_1\times X_2=(\cup_{i=1}^{m}U_{x_i})\times X_2=\cup_{i=1}^{m}(U_{x_i}\times X_2)$, 另一方面, 每个 $U_{x_i}\times X_2\subset\cup_{j=1}^{n_{x_i}}(U_{\alpha,x_i}^{j}\times V_{\alpha,x_i}^{j})$. 因此 $\mathcal{W}$ 有有限子覆盖 $\{U_{\alpha,x_i}^{j}\times V_{\alpha,x_i}^{j}\mid 1\le j\le n_{x_i}, i=1,2,\ldots,m\}$.

习 题

1.$X_1\times\ldots\times X_n$ 的子集 F 是闭集当且仅当 F 是形如 $F_1\times\ldots\times F_n$ 的集合的有限并集的交集, 其中 F_i 是 X_i 的闭集, $i=1,2,\ldots,n$.

2. 设 A,B 分别为拓扑空间 X,Y 的子集, 证明:

(1) $\mathrm{Int}(A\times B)=(\mathrm{Int}A)\times(\mathrm{Int}B)$, (2) $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$.

3. 证明乘积空间在同胚意义下的交换性与结合性:

(1) $X\times Y\cong Y\times X$;

(2) $(X\times Y)\times Z\cong X\times Y\times Z\cong X\times(Y\times Z)$.

4. 设 A_i 是空间 X_i 的子空间 $(i=1,2)$. 证明: $A_1\times A_2$ 作为乘积空间和它作为乘积空间 $X_1\times X_2$ 的子空间, 两者拓扑一致.

5. 设 A,B 为欧氏空间 R^n 的凸集, 证明 $A\times B$ 是凸集.

6. 证明: $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ 上的乘积拓扑是使得每个投射 $p_j\colon X_1\times X_2\times\ldots\times X_n\to X_j, j=1,2,\ldots,n$, 连续的最小拓扑.

7. *拓扑群* 是一个群 G, 并且具有拓扑结构使对应

$$G\times G\to G,\qquad G\to G$$

$$(x, y) \longmapsto xy, \qquad x \longmapsto x^{-1}$$

都连续，其中 $G \times G$ 具有 G 的拓扑所导出的乘积拓扑. 证明以下都是拓扑群.

(1) 任意群具有离散拓扑.

(2) 实数加法群 R 具有通常拓扑.

(3) 非 0 实数乘法群 R 具有通常拓扑.

(4) 所有 n 阶非奇异实矩阵所组成的乘法群 $GL(n, R)$，它的拓扑看作欧氏空间 R^{n^2} 的子空间拓扑.

8. 拓扑空间 X 叫做 n 维拓扑流形，若每一点 $x \in X$，存在一个邻域 U_x 同胚于欧氏空间 R^n. 证明：若 X, Y 为 n 维和 m 维流形，则 $X \times Y$ 是 $n+m$ 维流形.

9. 证明：(1) $X \times Y$ 局部连通当且仅当 X 与 Y 局部连通.

(2) $X \times Y$ 局部道路连通当且仅当 X 与 Y 局部道路连通.

(3) $X \times Y$ 局部紧当且仅当 X 与 Y 局部紧.

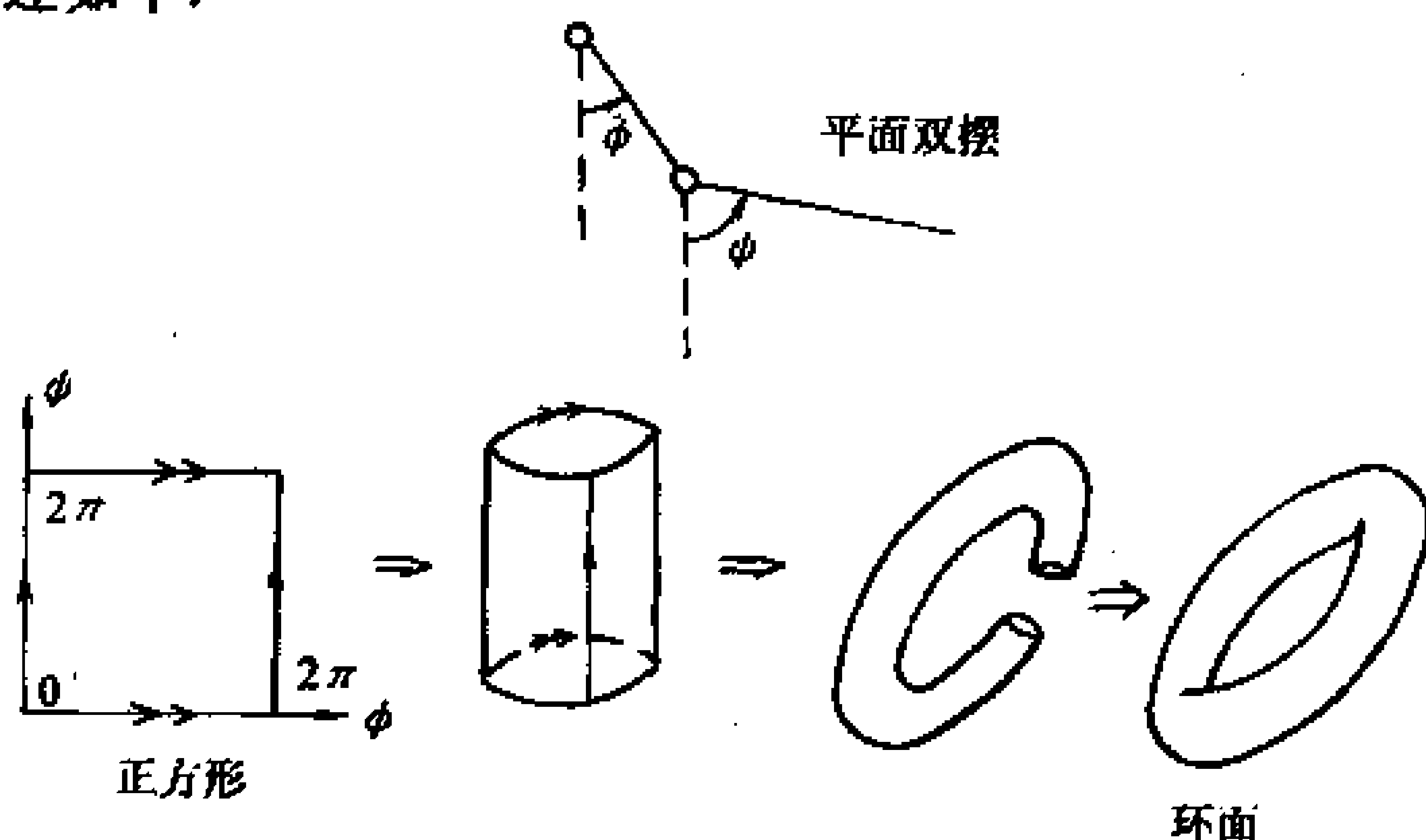
10. 设空间 X 使得 $X \times I$ 是正规的，则 X 是正规空间.

§8 商空间

乘积空间是从已知的旧空间构造新空间的常用方法. 本节将介绍第二种常用的方法即构作商空间.

如下图的平面双摆的每个瞬时位置可用两个有向角 φ, ψ 表示，即可与欧氏平面的点 (φ, ψ) 对应. 但当 n, m 为整数时，点 (φ, ψ) 与点 $(\varphi + 2m\pi, \psi + 2n\pi)$ 表示双摆的同一位置. 因此我们应当将 R^2 中这两点理解为同一个点. 这样，为了表示双摆的所有可能的瞬时位置，可用 R^2 中边长为 2π 的正方形上所有点来表示，但必须将此正方形每对对边上的点 $(0, \psi)$ 与 $(2\pi, \psi)$，点 $(\varphi, 0)$ 与 $(\varphi, 2\pi)$ 看作同一点. 如果将正方形每对对边按上述对应点粘合在一起，正方形就变成了环面. 我们称

环面是正方形 (按上述粘合方式) 所作成的 *粘合空间*(或 *商空间*). 从正方形到环面的粘合过程如下图所示, 其精确的数学描述如下.



不妨取边长为 1 的正方形 I^2. 在集合 I^2 中定义等价关系为: $(0,\psi)\sim(1,\psi),(\varphi,0)\sim(\varphi,1)$, 而其它点 $(\varphi,\psi)\sim(\varphi',\psi')$ 当且仅当 $\varphi=\varphi',\psi=\psi'(0\le\varphi,\varphi'\le1,0\le\psi,\psi'\le1)$. 用 $I^2/\sim$ 表示在上述等价关系下, 所有等价类的集合. 这个集合 $I^2/\sim$ 就是环面上所有点的集合, 或者说它们之间一一对应. 很自然的, 我们要在 $I^2/\sim$ 上定义一个拓扑, 使正方形 I^2 到环面 $I^2/\sim$ 的自然对应是连续的. 这就是下面定义的商拓扑, 从而 $I^2/\sim$ 成为 I^2 的商空间.

定义 8.1 设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间, $\sim$ 是集合 X 上的等价关系. $X/\sim$ 是商集 (或等价类集合),$p: X\to X/\sim$ 定义为 $p(x)=[x]$, 即 x 的等价类, p 叫自然投射. $X/\sim$ 的子集族

$$\mathcal{T}/\sim=\{W\subset X/\sim\mid p^{-1}(W)\in\mathcal{T}\}$$

称为 $\mathcal{T}$ 关于等价关系 $\sim$ 的 *商拓扑*, $(X/\sim,\mathcal{T}/\sim)$ 称为 $(X,\mathcal{T})$ 关于等价关系 $\sim$ 的 *商空间*.

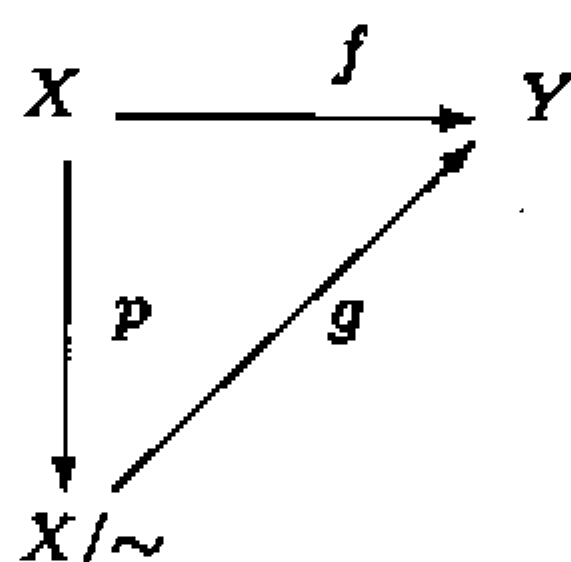
命题 8.2 $p: X\to X/\sim$ 是满映射, 且商拓扑 $\mathcal{T}/\sim$ 是使自然投射 p 连续的最大拓扑.

证：根据商拓扑的定义，$X/\sim$ 的任一开集 W，必须有 $p^{-1}(W)$ 是 X 的开集，故 p 连续且显然是满的.

另外，设 $\mathcal{S}$ 是 $X/\sim$ 上拓扑使 p 连续. 若 $V\in\mathcal{S}$，则 $p^{-1}(V)$ 是 X 的开集，即 $p^{-1}(V)\in\mathcal{T}$. 由商拓扑的定义，$V\in\mathcal{T}/\sim$. 故 $\mathcal{S}\subset\mathcal{T}/\sim$.

下面是在商空间 $X/\sim$ 上定义连续映射的重要方法.

命题 8.3 设 $f\colon X\to Y$ 为映射使当 $x\sim x'$ 有 $f(x)=f(x')$，其中 $x,x'\in X$，$\sim$ 是 X 上等价关系. 则存在映射 $g\colon X/\sim\;\to Y$ 使 $gp=f$.



证：$X/\sim$ 的任一元素是 X 的某一点 x 的等价类 $[x]$，定义 $g[x]=f(x)$. 对于 $[x]$ 中的另一代表 x'，则 $x\sim x'$. 由设，$f(x)=f(x')$，因此 g 是唯一定义的，且显然有 $gp=f$. 下面证明 g 连续. 对 Y 的任一开集 V，$p^{-1}(g^{-1}(V))=(gp)^{-1}(V)=f^{-1}(V)$，由 f 连续性，$f^{-1}(V)$ 是 X 的开集. 由商拓扑的定义，$g^{-1}(V)$ 是 $X/\sim$ 的开集，故 g 连续.

例 8.4 正方形 I^2 上定义等价关系：$(\varphi,0)\sim(\varphi,1),(0,\psi)\sim(1,\psi)$ 而其它 $(\varphi,\psi)\sim(\varphi',\psi')$ 当且仅当 $\varphi=\varphi',\psi=\psi'$，其中 $0\le\varphi,\varphi'\le 1,0\le\psi,\psi'\le 1$，商空间 $I^2/\sim$ 同胚于作为旋转面的环面 T(其参数方程见例 7.6)，也同胚于乘积空间 $S^1\times S^1$，我们证明如下.

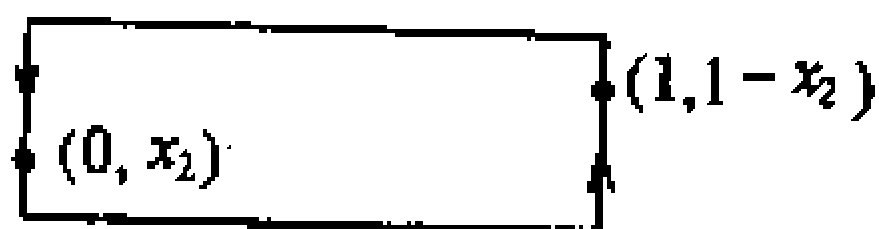
根据例 7.6 中环面 T 的参数方程，我们有

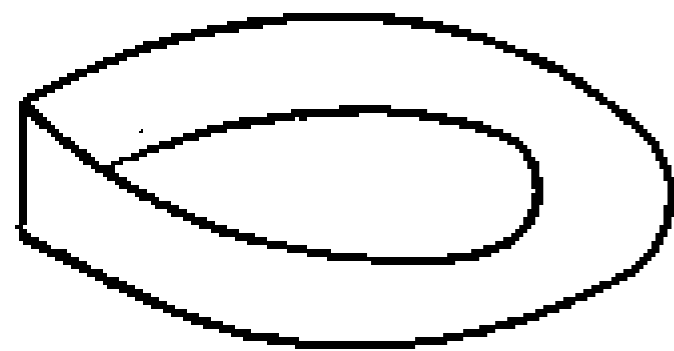
$$T=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x=(2+\cos 2\pi\varphi)\cos 2\pi\psi,$$
$$y=(2+\cos 2\pi\varphi)\sin 2\pi\psi, z=\sin 2\pi\varphi\},$$

作对应 $f: I^2 \to T$ 为 $f(\varphi,\psi)=(x,y,z)$，则 f 连续，且 $f(\varphi,0)=f(\varphi,1), f(0,\psi)=f(1,\psi)$. 由命题 8.3，存在映射 $g: I^2/\sim \to T$ 使 $gp=f$，即 $g[\varphi,\psi]=f(\varphi,\psi)$，容易看出 g 是既单又满的映射. 因为 I^2 紧致，$I^2/\sim$ 是 I^2 在映射 p 之下的连续象，故 $I^2/\sim$ 紧致. T 是 R^3 的子空间，显然是 Haussdorff 空间. 由定理 5.17,g 是同胚.

同样的，作 $f': I^2 \to S^1 \times S^1$ 使 $f'(\varphi,\psi)=(e^{i2\pi\varphi}, e^{i2\pi\psi})$. 因为 S^1 是单位圆周，它的每一点可用复数 $e^{i2\pi\varphi}(0\le\varphi\le 1)$ 表示，因此 $f'(\varphi,\psi)\in S^1\times S^1$，而且 $f'(\varphi,0)=f'(\varphi,1), f'(0,\psi)=f'(1,\psi)$. 因此 f' 导出既单又满的映射 $g': I^2/\sim \to S^1\times S^1$.$g'$ 也是同胚.

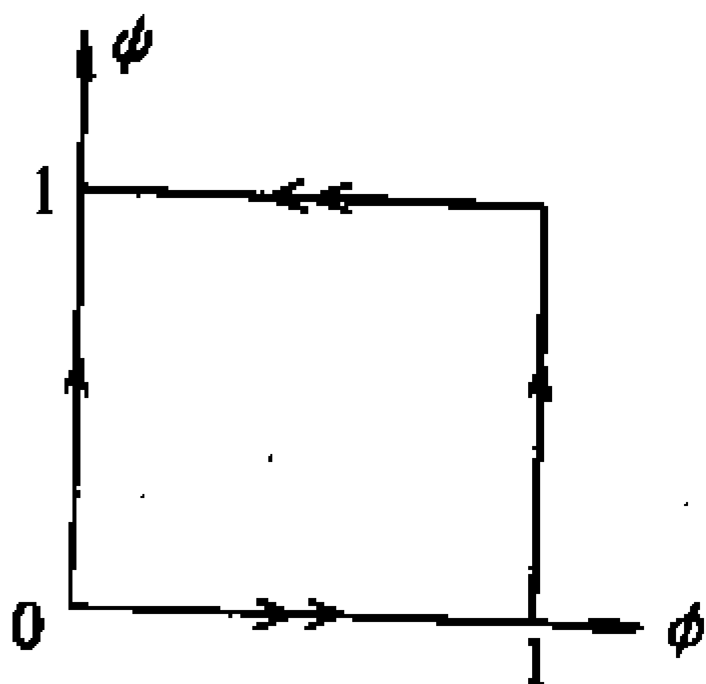
例 8.5　正方形一对对边反向粘合所得的商空间叫 Möbius 带：

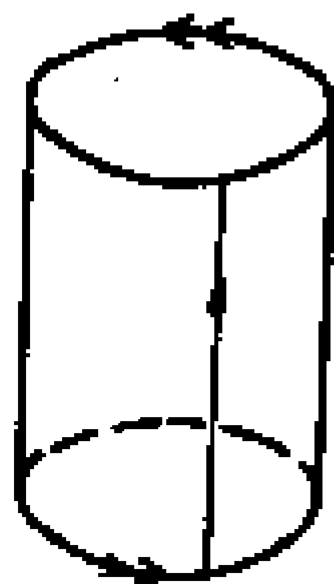




在正方形 I^2 上定义等价关系：$(0,x_2)\sim(1,1-x_2)$，其它的点 $(x_1,x_2)\sim(x_1',x_2')$，当且仅当 $x_1=x_1'$，$x_2=x_2'$，其中 $0\le x_1$, $x_1'\le 1$, $0\le x_2$, $x_2'\le 1$，则商空间 $I^2/\sim$ 就是 Möbius 带.

例 8.6　正方形一对对边同向粘合，而另一对对边反向粘合，则所得的商空间叫 Klein 瓶.







在 I^2 上定义等价关系：$(0,\psi)\sim(1,\psi),(\varphi,0)\sim(1-\varphi,1)$，其他的点 $(\varphi,\psi)\sim(\varphi',\psi')$ 当且仅当 $\varphi=\varphi',\psi=\psi'$，则商空间

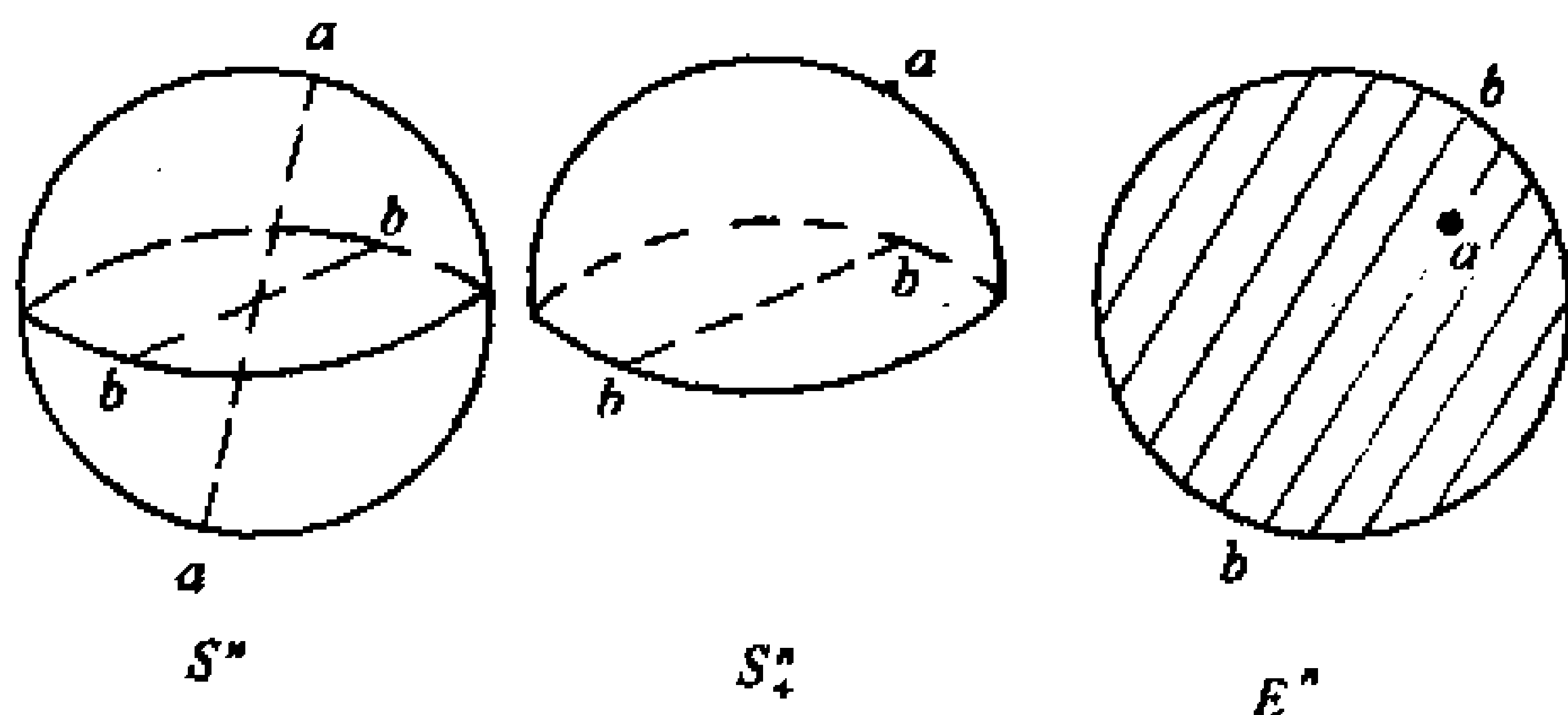
$I^2/\sim$ 就是 Klein 瓶. 它是 R^4 的子空间 (证明从略), 而在 R^3 中不可能实现. 上图只是一个示意图.

例 8.7 我们可通过三种途径得出射影几何中的重要研究对象 — 射影空间 RP^n.

(1) 作为 $R^{n+1}\backslash\{0\}$ 的粘合空间, 在 $R^{n+1}\backslash\{0\}$ 中 $x\sim y$ 当且仅当 x,y 在同一条过原点的直线上, 即存在实数 λ 使 $\lambda x_i = y_i (1\le i\le n+1)$.

(2) 作为 S^n 的粘合空间. S^n 中 $x\sim y$ 当且仅当 x,y 是对径点, 即 $x_i = -y_i (1\le i\le n+1)$.

(3) 作为 n 维球体 E^n 的粘合空间. E^n 的边界 S^{n-1} 的每对对径点定义为等价, 此外每个点和自身等价.



容易看出, (1) 和 (2) 得出的商空间是一致的. 关于 (2) 和 (3) 可以这样理解. 由于球面 S^n 的对径点看作同一个点, 因此只须考虑半球面 S^n_+, S^n_+ 内部的点和自身等价而 S^n_+ 边界上每对对径点等价. 根据例 4.9,S^n_+ 和 E^n 同胚, 因此 (2) 和 (3) 得出的商空间一致.

例 8.8 空间 X 将子空间 A 所有点粘合为一个点所得的商空间常记为 X/A. 在 X 上定义等价关系: $x\sim x'$ 当且仅当 $x,x'\in A$, 其它点和自身等价, 则商空间 $X/\sim$ 就是 X/A. 例如 $I/\{0,1\}\cong S^1, E^n/S^{n-1}\cong S^n$, 其中同胚关系的证明留给读者. 我们将 X/A 叫做空间 X 对子空间 A 所作的商空间. 空间 X 和 Y 的不相交的并集 $X\cup Y$ 对 $\{x_0,y_0\}$ 所作的商空间 $X\cup Y/\{x_0,y_0\}$ 叫做 X 与 Y 的 一点和, 记为 $X\vee Y$. 这里

x_0, y_0 分别是 X, Y 的给定的点.

最后我们讨论商映射及其一些性质.

定义 8.9 满映射 $f: X \to Y$ 叫做 商映射 若对 Y 的每一子集 V,V 是 Y 的开集. $\iff$ $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集.

显然, 自然投射 $p: X \to X/\sim$ 是商映射, 而且对任一商映射 $f: X \to Y$, 必存在 X 上的等价关系使 $Y \cong X/\sim$.

命题 8.10 (1) 任意满开映射 (或满闭映射) 是商映射.

(2) 两个商映射的合成仍为商映射. (习题 1)

命题 8.11 设 $f: X \to Y$ 为商映射, K 是局部紧 Hausdorff 空间, 则 $f \times 1_K: X \times K \to Y \times K$ 仍是商映射.

证: 易知 $f \times 1_K$ 是满映射, 故只须证明对 $U \subset Y \times K$ 使 $(f \times 1_K)^{-1}(U)$ 是 $X \times K$ 的开集, U 也是 $Y \times K$ 的开集.

任 $(y, z) \in U$, 取一点 x 使 $f(x) = y$. 则 $(f \times 1)(x, z) = (y, z)$ 且 $(x, z) \in (f \times 1)^{-1}(U)$. 因为这个集合是 $X \times K$ 的开集, 因此存在 X, K 的开集 O_1, O_2 使 $(x, z) \in O_1 \times O_2 \subset (f \times 1)^{-1}(U)$. 由 K 局部紧, 由 §5 习题 9 中的定义易知, 存在开集 V 使 $z \in V \subset \overline{V} \subset O_2$ 且 $\overline{V}$ 紧致, 故 $x \times \overline{V} \subset (f \times 1)^{-1}(U)$. 任 $z' \in \overline{V}$, 存在 X, K 的开集 $A_{z'}, B_{z'}$ 使 $(x.z') \in A_{z'} \times B_{z'} \subset (f \times 1)^{-1}(U)$. 令 $\{B_{z'}\}_{z' \in \overline{V}}$ 是 $\overline{V}$ 的开覆盖, 有有限子覆盖 $\{B_{z'}, \ldots, B_{z(m)}\}$. 令 $W = A_{z'} \cap \ldots \cap A_{z(m)}$, 这显然是 X 的开集, 且 $W \times \overline{V} \subset (f \times 1)^{-1}(U)$. 我们取满足 $W \times \overline{V} \subset (f \times 1)^{-1}(U)$ 的最大的 W, 仍记为 W. 可以证明 $f^{-1}(f(W)) = W$, 从而由 f 是商映射得出 $f(W)$ 是 Y 的开集. 但 $(y, z) \in f(W) \times V \subset U$, 故 U 是 $Y \times K$ 的开集.

剩下的只要证明 $f^{-1}(f(W)) = W$. 显然 $W \subset f^{-1}(f(W))$. 反之任 $x' \in f^{-1}(f(W))$, $z' \in \overline{V}$ 有 $(f \times 1)(x', z') = (f(x'), z') \in f(W) \times \overline{V} \subset U$, 故 $x' \times \overline{V} \subset (f \times 1)^{-1}(U)$. 和上面的方法相同, 因此存在开集 W', 使 $W' \times \overline{V} \subset (f \times 1)^{-1}(U)$. 由我们选取的 W 的最大性, $x' \in W' \subset W$, 因此 $f^{-1}f(W) \subset W$.

习 题

1. 证明：命题 8.10.

2. 用商空间精确描述下列空间：

(1) 圆柱面将它的上底圆周和下底圆周同向粘合.

(2) 二维球面 S^2 将它的赤道圆粘合成一个点.

(3) 欧氏平面 R^2 将它的以原点为圆心，半径为正整数的圆周各自粘合为一点.

3. 设 $f:X\to Y$ 为映射，$\sim$ 和 $\simeq$ 是 X 和 Y 上的等价关系使 $x\sim y$ 总是蕴含 $f(x)\simeq f(y)$. 用 f 构造映射 $f':X/\sim\to Y/\simeq$, 并证之.

4. 证明上题中若 f 是商映射，则 f' 也是商映射.

5. 设 X 是 Sierpinski 空间 (参见 §2 习题 1), 定义 $f:X\to I$ 为 $f(t)=0$ 当 $0\leq t<\frac{1}{2}$, $f(t)=1$ 当 $\frac{1}{2}\leq t\leq 1$. 验证 f 是商映射. 但 f 既非开映射也非闭映射.

6. 证明：一维射影空间 $RP^1\cong S^1$.

7. 利用映射 $f:S^2\to R^4, f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2-x_2^2,x_1x_2,x_1x_3,x_2x_3)$ 导出射影平面 RP^2 到 R^4 的嵌入.

8. 由嵌入 $f:S^n\to S^{n+1}, f(x_1,\ldots,x_{n+1})=(x_1,\ldots,x_{n+1},0)$ 出发，利用习题 3 构造一个嵌入 $f':RP^n\to RP^{n+1}$ 使得 $RP^{n+1}\backslash f'(RP^n)\cong\overset{\circ}{E}{}^{n+1}$.

9. $CX=X\times I/X\times\{1\}$ 称为 X 为底的锥形. 证明：$CS^n\cong E^{n+1}$.

10. $SX=CX/X\times\{0\}$ 称为 X 上双角锥. 证明：$SS^n\cong S^{n+1}$.

11. 设 $f:X\to Y$ 为映射. 证明：分别由下式

$$Cf[x,t]=[f(x),t]$$

$$Sf[x,t]=[f(x),t]$$

$$x\in X,t\in I$$

定义的 $Cf: CX \to CY, Sf: SX \to SY$ 均为映射.

§9 映射的同伦　空间的伦型

代数拓扑学是用代数方法研究空间在同胚之下的不变性质，或者空间的同胚分类问题. 在代数拓扑学中判断两个空间不是同胚的方法一般是这样的.

首先是建立某种法则，使每个空间 X 对应一个群 $G(X)$，而且空间之间的映射 $f: X \to Y$ 都对应它们相应的群之间的同态 $f_*: G(X) \to G(Y)$，满足

(1) 恒等映射 $1: X \to X$ 对应恒等同态 $1: G(X) \to G(X)$.

(2) 两个映射 $f: X \to Y, g: Y \to Z$ 的合成 $gf: X \to Z$ 对应的同态 $(gf)_* = g_* f_*$.

这样的话，若 $f: X \to Y$ 是同胚，即存在逆映射 $g: Y \to Z$ 使 $gf = 1_X, (fg) = 1_Y$，因此由以上两个条件得出 $g_* f_* = 1_{G(X)}, f_* g_* = 1_{G(Y)}$，从而 $f_*: G(X) \to G(Y)$ 是两个群之间的同构. 这就是说，$G(X)$ 是在同胚之下不变的 代数不变量. 利用代数不变量，可以得出若 $G(X)$ 与 $G(Y)$ 不同构，则 X 与 Y 不同胚.

但是在实践中，情况稍微有些复杂. 到目前为止，我们已知的实质上的所有代数不变量是同伦等价之下不变的，而且空间之间的同伦等价是比同胚更弱的. 因此我们在目前一般的只能讨论空间在同伦等价之下的分类问题，而很难讨论同胚分类问题，至少在大多数的一般情况下是这样.

因此，同伦和空间之间的同伦等价就成为代数拓扑学的重要概念. 下面我们精确的描述这些概念.

定义 9.1　两个映射 $f_0, f_1: X \to Y$ 称为 同伦的(或 f_0 同伦于 f_1)，若存在连续映射 $F: X \times I \to Y$ 使

$$F(x,0) = f_0(x), F(x,1) = f_1(x), \forall x \in X$$

这样的 F 叫做由 f_0 到 f_1 的 同伦或 伦移, 记为 $f_0 \overset{F}{\simeq} f_1$, 或 $f_0 \simeq f_1$. 有时候将 t 理解为时间 (参数), 把 $F(x,t)$ 写成为 $f_t(x)$, 则 $\{f_t: X \to Y\}_{t\in I}$ 为单参数映射族, 每个 f_t 都是映射. 但要注意, 不仅对每个 t, f_t 是连续的, 而且 $f_t(x)$ 同时连续地依赖于两个变量 x 与 t.



命题 9.2 在从 X 到 Y 的所有映射组成的集合 Y^X 中, 同伦的关系 $\simeq$ 是一个等价关系.

证: (1) 自反性: 设 $f: X \to Y$ 为映射, 用 $F(x,t) = f(x)$, 任 $x \in X$ 来定义 $F: X \times I \to Y$. 显然 F 连续且 $f \overset{F}{\simeq} f$.

(2) 对称性: 设 $f \overset{F}{\simeq} g: X \to Y$, 作 $F': X \times I \to Y$ 使 $F'(x,t) = F(x, 1-t)$, 则 $F'(x,0) = F(x,1) = g(x), F'(x,1) = F(x,0) = f(x)$, 因此 $g \overset{F'}{\simeq} f$.

(3) 传递性: 设 $f \overset{F}{\simeq} g: X \to Y, g \overset{G}{\simeq} h: X \to Y$. 定义一个新的映射 $H: X \times I \to Y$,

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

根据粘接引理 4.5,H 是映射且 $H(x,0) = f(x), H(x,1) = h(x)$. 因此 $f \simeq h$.

根据这个命题, 映射集合 Y^X 中按同伦关系分成若干个等价类, 叫同伦类. f 的同伦类记作 $[f]$, X 到 Y 的映射同伦类的集合记作 $[X,Y]$.

如果 $f_0 \simeq f_1: X \to Y$ 而 f_1 是常值映射, 即 $f_1(X) = y_0 \in Y$, 称 f_0 同伦于零 或 零伦. 常值映射 f_1 记为 c_{y_0}.

定理 9.3 设 Y 为欧氏空间 R^n 的子空间, $f, g: X \to Y$ 为映射, 若对每点 $x \in X, f(x)$ 与 $g(x)$ 在 Y 中可用线段连接, 则 $f \simeq g$.

证: 作 $F: X \times I \to Y$ 为 $F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$, 任 $x \in X, t \in I$. $(1-t)f(x) + tg(x)$ 当 $0 \le t \le 1$ 表示点 $f(x)$ 与 $g(x)$ 连成的线段中的任一点, 由设这些点在 Y 中. 易证 F 是映射 (习题) 且 $F(x,0) = f(x), F(x,1) = g(x)(x \in X)$. 因此 $f \simeq g$.

映射 $f \simeq g: X \to Y$ 从直观上讲就是对每点 $x \in X$, 点 $f(x)$ 可在 Y 中连续的变形到 $g(x)$. 上述定理中, 点 $f(x)$ 经过直线段连续变形到点 $g(x)$. 下面的推论则是 $f(x)$ 沿着球面 S^{n-1} 的大圆弧连续变形到 $g(x)$.

推论 9.4 两个映射 $f, g: X \to S^{n-1}$ 使对所有 $x \in X$ 有 $f(x) \neq -g(x)$, 则 $f \simeq g$.

证: 因为 $S^{n-1} \subset R^n \backslash \{0\}$ 而 $f(x), g(x)$ 在 $R^n \backslash \{0\}$ 中可用线段连接, 因此由定理 9.3,$f \simeq g: X \to R^n \backslash \{0\}$. 将这个同伦和中心投射 $\phi: R^n \backslash \{0\} \to S^{n-1}(\phi(y) = \frac{y}{\|y\|}, y \in R^n \backslash \{0\})$ 合成, 则得到 $f \simeq g: X \to S^{n-1}$. 具体的同伦 $F: X \times I \to S^{n-1}$ 可定义为 $F(x,t) = \frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|}$.

定义 9.5 设 A 是 X 的子空间, 有序偶 (X, A) 叫做 空间偶. 若映射 $f: X \to Y$ 将 X 的子空间 A 映入 Y 的子空间 B, 称 f 为 空间偶之间的映射, 记作 $f: (X, A) \to (Y, B)$.

定义 9.6 两个空间偶之间的映射 $f, g: (X, A) \to (Y, B)$ 称为 同伦的, 如果存在空间偶之间的映射 $F: (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ 使 $F(x,0) = f(x), F(x,1) = g(x), x \in X$. 记作 $f \overset{F}{\simeq} g: (X, A) \to (Y, B)$.

定义 9.7 设 $f, g: (X, A) \to (Y, B)$ 是空间偶之间的映射使 $f|_A = g|_A$. f 与 g 叫做 相对于 A 是同伦的, 如果存在空

间偶之间的映射 $F:(X\times I, A\times I)\to(Y,B)$ 使 $F(x,0)=f(X), F(x,1)=g(x)$(任 $x\in X$), 而且 $F(a,t)=f(a)=g(a)$(任 $a\in A, t\in I$). 这就是说伦移 F 在 A 上是"固定"的. 记作 $f\simeq g \ \ \mathrm{rel}A$.

空间偶之间的两个映射的同伦或相对于 A 的同伦, 这些概念是原有的 (绝对) 同伦概念的推广. 容易看出, 当 A, B 为空集, 空间偶之间的同伦就变成原来的绝对同伦. 下面叙述空间或空间偶之间的同伦等价概念.

定义 9.8 空间 X 与 Y 叫做 *同伦等价的* (或 *有相同伦型*), 如果存在映射 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ 使 $gf\simeq 1_X$, $fg\simeq 1_Y$, 这时也称 X 同伦等价于 Y. 记作 $X\simeq Y$. g 叫 f 的 *同伦逆*.

类似的, 空间偶 (X,A) 与 (Y,B) 叫做同伦等价的, 如果存在空间偶之间的映射 $f:(X,A)\to(Y,B), g:(Y,B)\to(X,A)$ 使 $gf\simeq 1_X:(X,A)\to(X,A), fg\simeq 1_Y:(Y,B)\to(Y,B)$.

命题 9.9 若 $f_0\simeq f_1:X\to Y, g_0\simeq g_1:Y\to Z$, 则 $g_0f_0\simeq g_1f_1:X\to Z$. 相应于空间偶的结论也成立.

证: 设 F 是 f_0, f_1 之间的伦移, G 是 $g_0\simeq g_1$ 之间的伦移. 令 $H_1=g_0F:X\times I\to Z$, 则 $g_0f_0\overset{H_1}{\simeq}g_0f_1$. 另外, 令 $H_2=G(f_1\times 1_I)$, 即 $H_2(x,t)=G(f_1(x),t)$, 则 $g_0f_1\overset{H_2}{\simeq}g_1f_1$. 由同伦关系的传递性, $g_0f_0\simeq g_1f_1$.

定理 9.10 空间之间 (或空间偶之间) 的同伦等价关系是一个等价关系.

证: 根据定义, 自反性和对称性显然成立. 今证明传递性. 设 $X\simeq Y, Y\simeq Z$, 则存在 $f:X\to Y, f':Y\to X, g:Y\to Z, g':Z\to Y$, 使 $f'f\simeq 1_X, ff'\simeq 1_Y, g'g\simeq 1_Y$ 且 $gg'\simeq 1_Z$. 因此 $(f'g')(gf)\simeq f'1_Yf=f'f\simeq 1_X$. 同样的 $(gf)(g'f')\simeq 1_Z$. 因此 $gf:X\to Z$ 是同伦等价, 即 $X\simeq Z$.

定义 9.11 空间 X 的子空间 A 叫做 X 的 *收缩核*, 如果存在映射 $r:X\to A$ 使 $r(a)=a$(任 $a\in A$). 设 $i:A\hookrightarrow X$ 为内射 (即 $i(a)=a$), 上述条件实际上是 $ri=1_A$. 映射 r 称为 *收*

缩 (映射).

更进一步，如果还有同伦 $ir \overset{H}{\simeq} 1_X$, 称 H 为 **形变收缩**,A 为 X 的 **形变收缩核**, 假如 H 还满足

$$H(a,t) = a, \qquad \text{对所有} a \in A, t \in I$$

则称 H 为 **强形变收缩**,A 为 X 的 **强形变收缩核**.

根据形变收缩核的定义，容易看出:

命题 9.12 若 A 是 X 的形变收缩核，则 $A \simeq X$, 其中内射 $i: A \to X$ 是同伦等价， $r: X \to A$ 是 i 的同伦逆.

定义 9.13 若空间 X 和独点空间同伦等价，称 X 为 **可缩的**.

例 9.14 锥形 CX(参见 §8 习题 9) 的顶点是 CX 的强形变收缩核，从而锥形 CX 可缩.

证: 设 a 为 CX 的顶点， $i: \{a\} \hookrightarrow CX$ 为内射， $r: CX \to \{a\}$ 为常值映射，显然 $ri = 1_{\{a\}}$, 只要证 $ir \simeq 1_{CX}$, 作 $q: (X \times I) \times I \to X \times I$ 为

$$q(x,s,t) = (x,(1-s)t+s), x \in X, 0 \leq s,t \leq 1$$

则 q 为映射，从而 q 与商映射 $p: X \times I \to CX$ 的合成 pq 也连续. 由命题 8.11, 下图中 $p \times 1_I$ 是商映射.

$$\begin{array}{ccccc} (X\times I)\times I & \xrightarrow{q} & X\times I & \xrightarrow{p} & CX \\ \downarrow{\scriptstyle p\times 1_I} & & & \nearrow{\scriptstyle H} & \\ CX\times I & & & & \end{array}$$

另外 pq 满足命题 8.3 的条件，从而存在映射 H 使 $pq = H(p \times 1_I)$. 显然有 $H([x,s],t) = [x,(1-s)t+s], x \in X, 0 \leq s,t \leq 1$. 不难验证 $ir \overset{H}{\simeq} 1_{CX}$.

命题 9.15 映射 $f: X \to Y$ 零伦 $\iff$ f 可扩张到 CX 上.

证: 必要性. 设 $f \overset{F}{\simeq} c_{y_0}: X \to Y$, 则 $F: X \times I \to Y$ 满足 $F(x,0) = f(x), F(x,1) = y_0$(任 $x \in X$). 由命题 8.3, 存在映射 $g: CX \to Y$ 使 $g[x,s] = F(x,s)$, 任 $x \in X, s \in I$. 因此 g 是 f 的扩张.

充分性. 若 f 可扩张映射为 $g: CX \to Y$, 则 g 与商映射 $p: X \times I \to CX$ 的合成 $F = g \circ p$ 有 $f \overset{F}{\simeq} c_{y_0}, y_0 = g[x,1]$.

推论 9.16 映射 $f: S^n \to Y$ 零伦 $\iff$ f 可扩张到 E^{n+1}.

命题 9.17 下列断语彼此等价:

(1) X 可缩.

(2) $1_X \simeq c_{X_0}: X \to X$.

(3) 对任意空间 Y 及映射 $f: X \to Y, f$ 零伦.

(4) 对任意空间 Z 及映射 $g: Z \to X, g$ 零伦.

(5) X 是锥形 CX 的收缩核.

证: 设 $*$ 表示独点空间, 若 $X \simeq *$, 存在映射 $f: X \to *, g: * \to X$ 使 $gf \simeq 1_X$, gf 显然是常值. 因此 (1)$\Longrightarrow$(2).

(2)$\Longrightarrow$(3) 设 $1_X \simeq c_{x_0}$, 则 $f = f \circ 1_X \simeq f \circ c_{x_0} = c_{f(x_0)}$.

(3)$\Longrightarrow$(4). 由 (3), 特别地有 $1_X \simeq 0$ 故 $g = 1_X \cdot g \simeq 0$.

(4)$\Longrightarrow$(5). 由 (4), 特别地有 $1_X \simeq 0$, 由命题 9.15, 1_X 可扩张到 CX 上得到保核收缩 $r: CX \to X$.

(5)$\Longrightarrow$(1). 设 $r: CX \to X$ 为保核收缩, $p: X \times I \to CX$ 为商映射. 则 $rp(X \times \{1\})$ 为独点, 记作 $*$. 令 $i: * \hookrightarrow X$ 为内射, $f: X \to *$ 为常值, 则 $fi = 1_*$, 而 $r \circ p: X \times I \to X$ 为 1_X 到 if 的同伦. 因此 $X \simeq *, X$ 可缩.

习 题

1. 设 $f, g: X \to Y$ 为常值映射, 证明: $f \simeq g$ 当且仅当 $f(X)$ 与 $g(X)$ 在 Y 的同一个道路连通分支中.

2. 若 $f: X \to S^n$ 为不满的映射, 则 $f \simeq 0$.

3. 证明：定理 9.3 中 F 的连续性.

4. 已知 $f,g: RP^1 \to RP^2$ 为 $f[x,y]=[x,y,0], g[x,y]=[x,-y,0]$. 试作出 f 到 g 的同伦 F.

5. 设 X 为连结 $(0,1)$ 和 $(\frac{1}{n},0)(n=1,2,\ldots)$ 的线段和连结 $(0,1)$ 和 $(0,0)$ 的线段所组成的 R^2 的子空间. 证明：X 可缩但作为空间偶之间的映射，$1:(X,(0,0))\to(X,(0,0))$ 不是零伦的.

6. 设 A 为固定空间. 证明：映射 $f:X\to Y$ 导出一个对应 $f_*:[A,X]\to[A,Y]$ 满足

(1) 若 $f\simeq g$, 则 $f_*=g_*$.

(2) $1_X:X\to X$ 导出恒等对应 $1_*=1:[A;X]\to[A;X]$.

(3) 若 $g:Y\to Z$ 为另一映射，则 $(gf)_*=g_*f_*$.

7. 证明在下列情况下 A 是 X 的强形变收缩核.

(1) $A=E^n, X=R^n$.

(2) $A=S^n, X=E^{n+1}\backslash\{0\}$.

(3) $A=S^n, X=\{x\in R^{n+1}\mid \frac{1}{2}\le\|x\|\le 2\}$.

8. Hausdorff 空间的收缩核一定是闭集.

9. 证明：若 A 是 X 的收缩核，B 又是 A 的收缩核，则 B 是 X 的收缩核.

10. 证明：$X\times I\simeq X$, Möbius 带 $\simeq S^1$.

11. 若 $f:X\simeq Y$, 则 f 的所有同伦逆彼此同伦.

12. 设 x_0 为 S^n 的给定点，证明下列断语彼此等价：

(1) $f\simeq 0$.

(2) f 可扩张到 E^{n+1} 上.

(3) $f\simeq 0\,\mathrm{rel}\{x_0\}$.

其中 $f:S^n\to X$ 为已知映射.

第二章 单纯复形和多面体

代数拓扑学所研究的相当部分的空间是欧氏空间的子空间. 由于欧氏空间比一般拓扑空间 (甚至是度量空间) 有更丰富的几何结构 -- 仿射结构, 或者说线性结构, 这使我们能够运用更特殊的一些技巧, 即组合的技巧. 本章就是用组合的方法研究欧氏空间的一类特殊子空间 -- 多面体, 它们是由一些最基本的图形 -- 单纯形按照一定规则组合而成的.

§1 单纯形 单纯复形和多面体

n 维单纯形是三角形, 四面体等在高维情况下的推广. 三角形可由三个顶点展成, 四面体可由四个不共面的点展成. 不共线的三点, 不共面的四点等可以推广成以下的几何无关的 $n+1$ 个点.

定义 1.1 欧氏空间 R^m 中的 $n+1$ 个点 $a^0, a^1, \ldots, a^n$ 叫做几何无关的, 如果向量 $a^1-a^0, a^2-a^0, \ldots, a^n-a^0$ 线性无关. 另外规定独点组 a^0 总是几何无关的.

显然 a^0, a^1, a^2 几何无关当且仅当 a^0, a^1, a^2 不共线. 同样的, a^0, a^1, a^2, a^3 几何无关当且仅当它们不共面. 下面是几何无关的一个等价条件.

命题 1.2 $a^0, a^1, \ldots, a^n$ 几何无关当且仅当 $\sum_{i=0}^n \lambda_i a^i = 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ 蕴含 $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

证: 当 $n=0$ 显然成立. 今设 $n>0$. 命题中的两个等式等价于

$$(1.3) \qquad \lambda_1(a^1-a^0)+\lambda_2(a^2-a^0)+\cdots+\lambda_n(a^n-a^0)=0$$

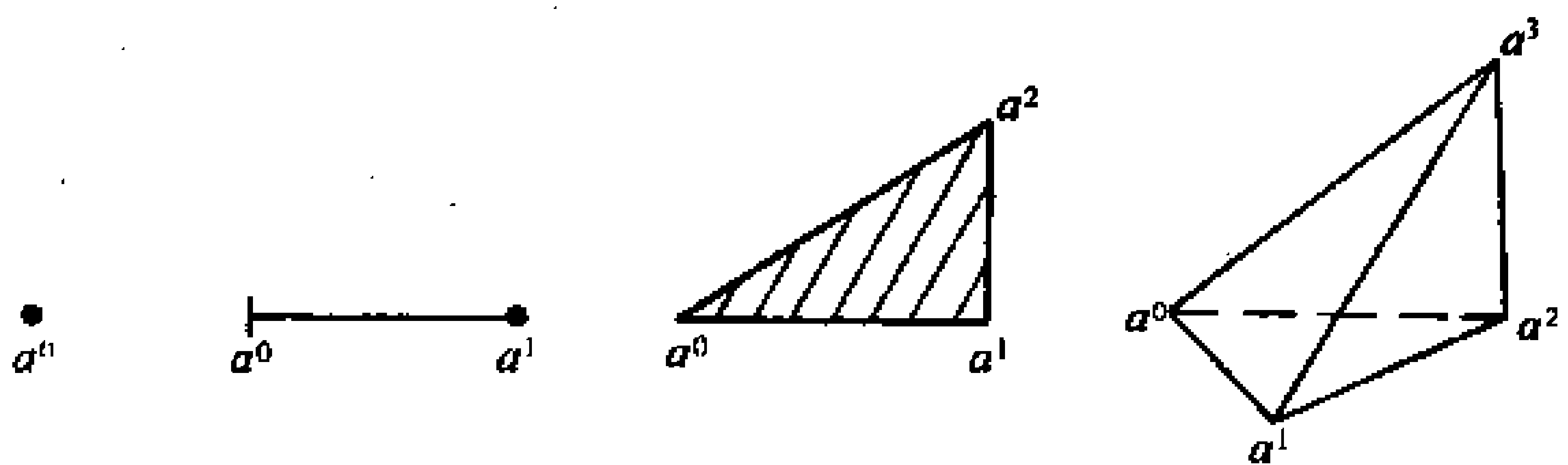
$$\lambda_0 = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$$

若 $a^0,\ldots,a^n$ 几何无关, 则 (1.3) 蕴含 $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. 反之, 若命题的充分性假设成立, 则 (1.3) 蕴含 $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, 从而 $a^1 - a^0,\ldots,a^n - a^0$ 线性无关, $a^0,a^1,\ldots,a^n$ 几何无关.

两点 a^0,a^1 展成以 a^0,a^1 为端点的线段, 记为 (a^0,a^1). 作为集合, $(a^0,a^1) = \{ta^0+(1-t)a^1 \mid 0 \le t \le 1\}$, 或者等价的可写成 $(a^0,a^1) = \{\lambda_0 a^0 + \lambda_1 a^1 \mid \lambda_i \ge 0, \lambda_0 + \lambda_1 = 1\}$. 三个不共线的点 a^0,a^1,a^2 展成三角形, 记为 (a^0,a^1,a^2), 同样的, 作为集合, $(a^0,a^1,a^2) = \{\lambda_0 a^0 + \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 \mid \lambda_i \ge 0, \sum_{i=0}^2 \lambda_i = 1\}$. 因此单纯形作为三角形的推广应定义如下.

定义 1.4 设 $a^0,a^1,\ldots,a^n$ 是欧氏空间 R^m 中的几何无关点组. 集合 $\sigma_n = \{\sum_{i=0}^n \lambda_i a^i \mid \lambda_i \ge 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\}$ 给于 R^m 的子空间拓扑称为 n 维 **单纯形**. 简称为 n 维 **单形**, 记为 $(a^0,a^1,\ldots,a^n)$. $a^0,a^1,\ldots,a^n$, 称为此单形的 **顶点**, 或单形由顶点 $a^0,a^1,\ldots,a^n$ 所展成. 如果可以不表明它的顶点, 则可简记为 σ_n, n 叫做单形 σ_n 的 **维数**.

显然, 0 维单形是一个点, 一维单形 (a^0,a^1) 是线段, 二维单形 (a^0,a^1,a^2) 是三角形, 三维单形 (a^0,a^1,a^2,a^3) 是四面体.



n 维单形 σ_n 的每一点 x 可唯一的表示为 $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a^i$, 其中有序非负数组 $(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ 是唯一确定的, 称为点 x 的 **重心坐标**. 单形 σ_n 的 **重心** $\hat{\sigma}_n$ 是一个特殊点, 它的重心坐标为 $(\frac{1}{n+1},\ldots,\frac{1}{n+1})$, 即 $\hat{\sigma}_n = \frac{1}{n+1}(a^0 + a^1 + \cdots + a^n)$.

σ_n 的点 $x=\sum_{i=0}^n \lambda_i a^i$ 如果有 $\lambda_i>0(i=0,1,\ldots,n)$, 则称 x 为 σ_n 的 内点, 否则称为 σ_n 的 边界点. 注意到 0 维单形 (a^0) 是一个点 a^0, 而它是内点.

若 $a^{i_0},a^{i_1},\ldots,a^{i_r}$, 是单形 σ_n 的顶点 $a^0,a^1,\ldots,a^n$ 的子集, 则 $a^{i_0},a^{i_1},\ldots,a^{i_r}$, 仍是几何无关点组, 它们所展成的单形 $(a^{i_0},a^{i_1},\ldots,a^{i_r})$, 叫做 σ_n 的 面. σ_n 自身也叫做 σ_n 的面, 其他的叫做 真面. 容易看出, 其真面上的点是 σ_n 的边界点. 例如, (a^0,a^1,a^2) 的真面 (a^0,a^1) 上的点 $\lambda_0a^0+\lambda_2a^2(\lambda_0+\lambda_2=1)$ 是 (a^0,a^1,a^2) 的边界点.

下面是单形的最基本的性质.

命题 1.5 (1) 单形 $\sigma_n=(a^0,a^1,\ldots,a^n)$ 是含顶点 $a^0,a^1,\ldots,a^n$ 的最小凸集, 它是 R^m 的紧致的, 闭的连通子空间.

(2) n 维单形 $\sigma_n=\tau_n \iff$ 它们有相同的顶点.

(3) 任意两个 n 维单纯形线性同胚.

证: (1)σ_n 的任意两点 $x=\sum_{i=0}^n \lambda_i a^i, y=\sum_{i=0}^n u_i a^i$, 连接 x,y 的线段上每一点可写为

$$tx+(1-t)y=\sum_{i=0}^n[t\lambda_i+(1-t)u_i]a^i, 0\le t\le 1$$

因为 $\lambda_i, u_i\ge 0$, 且 $\sum_{i=0}^n\lambda_i=\sum_{i=0}^n u_i=1$, 因此 $t\lambda_i+(1-t)u_i\ge 0$, 且 $\sum_{i=0}^n[t\lambda_i+(1-t)u_i]=1$, 从而 $tx+(1-t)y\in\sigma_n, \sigma_n$ 是凸集.

设 V 是含 $a^0,a^1,\ldots,a^n$ 任一凸集, 只要证明 $\sigma_n\subset V$. 任意 $z=\sum_{i=0}^n\lambda_i a^i\in\sigma_n$, 不妨设 $\lambda_0\ne 0$, 且 $\lambda_0<1$. 因此 $z=\lambda_0a^0+(1-\lambda_0)\sum_{i=1}^n\frac{\lambda_i}{1-\lambda_0}a^i$. 由归纳假设, $\sum_{i=1}^n\frac{\lambda_i a^i}{1-\lambda_0}\in V$. 再根据 V 是凸集, 则 $z\in V$, 因此 $\sigma_n\subset V$.

因为 σ_n 所有内点的集合 $\mathring{\sigma}_n$(叫 σ_n 的内部) 的闭包等于 σ_n 自身, 因此 σ_n 是 R^m 的闭子集. 显然 σ_n 是有界闭集, 故 σ_n 紧致. 由于凸集是道路连通的, 因此 σ_n 连通.

(2) 因为 σ_n,τ_n 是含其顶点最小凸集, 结论易得.

(3) 作 $f:\sigma_n \to \tau_n$ 为 $f(\sum_{i=0}^n \lambda_i a^i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i b_i$，再作 $f^{-1}:\tau_n \to \sigma_n$ 为 $f^{-1}(\sum \lambda_i b^i) = \sum \lambda_i a^i$，则 f, f^{-1} 是互逆的映射，故 f 是同胚且是线性的.

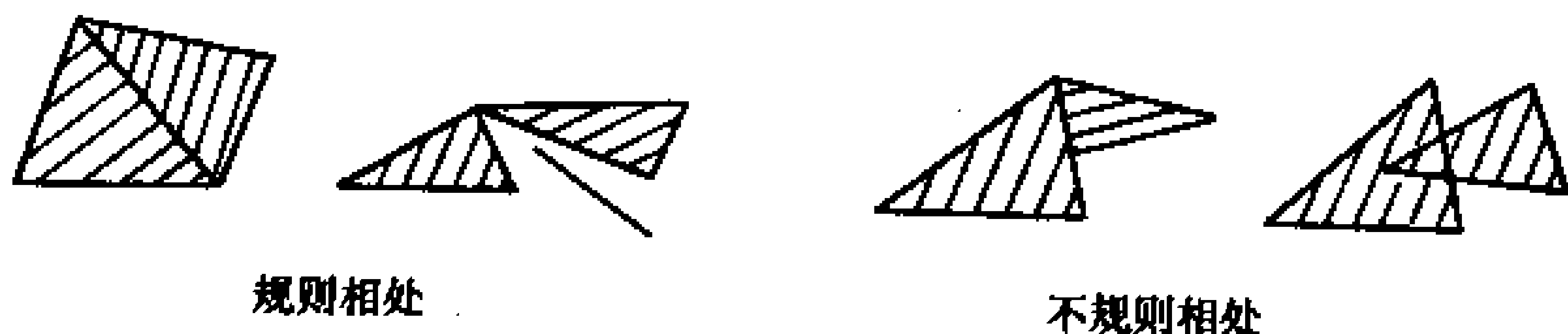
下面我们讨论若干个单形是怎样组合在一起构成某些更复杂的空间.

定义 1.6 单纯复形K 是有限个 R^m 中单形的集合，满足

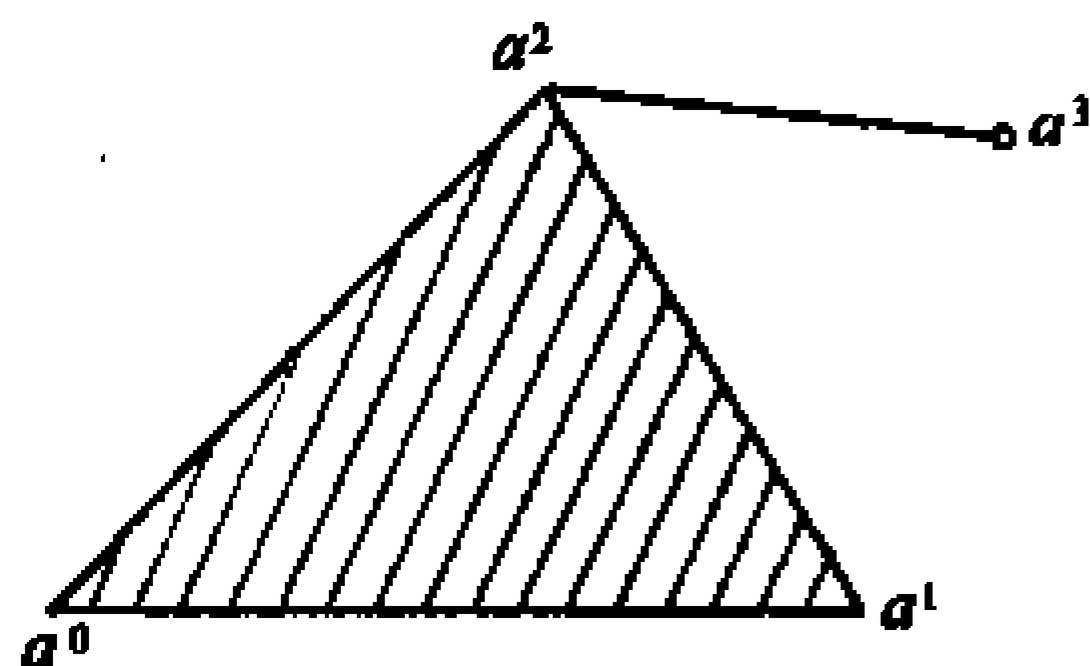
(1) 若 $\sigma_n \in K$，则 σ_n 的任一个面 $\in K$.

(2) 若 $\sigma_n, \tau_r \in K$，则 $\sigma_n \cap \tau_r$ 或是空集或是公共面.

K 中单形的最大维数叫做复形 K 的维数，记作 $\dim K$. K 中每个 0 维单形叫做 K 的 顶点. 条件 (1) 是为了以后建立拓扑不变量 — 同调群的需要而采用的. 条件 (2) 称为单形之间"规则相处"，是将若干个单形组合在一起所必需的一个条件.



例 1.7 $K = \{(a^0a^1a^2), (a^0a^1), (a^1a^2), (a^0a^2), (a^2a^3), (a^0), (a^1), (a^2), (a^3)\}$ 是单纯复形，$\dim K = 2, a^0, a^1, a^2, a^3$ 为 K 的顶点. 图形如下图.



复形 K 的子集 L 若满足条件 (1)，则称 L 为 K 的 子复形，注意到 L 自然满足条件 (2)，从而 L 本身也是单纯复形.

单纯偶 (K, L) 由复形 K 和它的子复形 L 所组成.

定义 1.8 复形 K 的所有单形的并集 $|K| = \cup_{\sigma \in K}\sigma$ 给予 R^m 的子空间拓扑称为 (K 的) 多面体. K 的子复形 L 的多面体 $|L|$ 叫做多面体 $|K|$ 的 子多面体.

例 1.9 n 维单形 σ_n 的所有面组成的复形叫做单形 σ_n 的闭包复形, 记作 $K(\sigma_n)$. σ_n 的所有真面组成的复形叫做 σ_n 的边界复形, 记作 $\dot{\sigma}_n$. 显然 $\dot{\sigma}_n$ 是 $K(\sigma_n)$ 的子复形, $K(\sigma_n)$ 比 $\dot{\sigma}_n$ 只多出一个单形 σ_n, 另外多面体 $|K(\sigma_n)| = \sigma_n$, $|\dot{\sigma}_n|$ 是单形 σ_n 所有边界点集合.

一些有关复形和多面体的基本的但是重要的性质将集中叙述在以下命题.

命题 1.10 (1) 复形 K 的多面体 $|K|$ 是 R^m 的紧闭子空间.

(2) $|K|$ 的每点 x 在 K 的唯一的一个单形内部.

(3) 单纯复形的条件 (2) 可以改为如下条件 (2)': 任意 $\sigma_n, \tau_r \in K$ 有 $\overset{\circ}{\sigma}_n \cap \overset{\circ}{\tau}_r = \phi$.

(4) 子多面体 $|L|$ 在 $|K|$ 中闭.

(5) 若 L, M 为 K 的子复形, 则 $L \cap M, L \cup M$ 也是 K 的子复形.

证: (1) $|K|$ 是有限个单形的并集, 而每个单形是紧的, 因此 $|K|$ 也是 R^m 的紧子空间.

(2) 若 $\forall x \in |K| = \cup_{\sigma \in K}\sigma$, 则 $x \in \sigma$, σ 为某个 K 中单形. 设 $\sigma = (a^0, a^1, \ldots, a^n)$, 则 $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a^i$. 设 $\lambda_{i_0}, \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_r}$ 是 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 中所有大于 0 的 (即其它的 $\lambda_i = 0$), 则 x 是 $\tau = (a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r})$ 的内点, 即 $x \in \overset{\circ}{\tau}$, 而 $\tau \in K$.

如果 x 是 σ_1, σ_2 的内点, 设 $\sigma_1 = (a^0, a^1, \ldots, a^r)$, 则 $x = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i a^i$, 其中每个 $\lambda_i > 0$. 由 x 是 σ_1 和 σ_2 的内点, 则公共面 $\sigma_1 \cap \sigma_2$ 与 σ_1 的内部有交点, 从而 $\sigma_1 \cap \sigma_2$ 也具有顶点 $a^0, a^1, \ldots, a^r$, 即和 σ_1 有相同顶点. 故 $\sigma_1 = \sigma_1 \cap \sigma_2$. 同理 $\sigma_2 = \sigma_1 \cap \sigma_2$, 因此 $\sigma_1 = \sigma_2$, 证明了唯一性.

(3) 只要证明条件 (1),(2)' 可导出复形的条件 (1)(2).

设 $\sigma,\tau \in K$ 有公共顶点 $a^0,a^1,\ldots,a^r$, 我们证明 $\sigma\cap\tau = (a^0,a^1,\ldots,a^r)$, 即公共面, (若没有公共顶点, 证明中也自然导出 $\sigma\cap\tau=\phi$), 从而条件 (2) 成立.

设 $\sigma = (a^0,a^1,\ldots,a^r,b^{r+1},\ldots,b^s), \tau = (a^0,a^1,\ldots,a^r, c^{r+1},\ldots,c^t)$, 则 $(a^0,a^1,\ldots,a^r)\subset\sigma\cap\tau$, 反之, 任 $x\in\sigma\cap\tau$, 则 $x=\sum_{i=0}^r\lambda_i a^i+\sum_{i=r+1}^s\lambda_i b^i=\sum_{i=0}^r u_i a^i+\sum_{i=r+1}^t u_i c^i$, 其中 $\lambda_i,u_i\geq 0$, 而且 $\sum_{i=0}^s\lambda_i=\sum_{i=0}^t u_i=1$. 若有某个 $i(r+1\leq i\leq s)$ 使 $\lambda_i>0$, 则 x 在不同单形内部, 与条件 $(2)'$ 矛盾, 因此 $\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_s=0$. 同理 $u_{r+1}=\cdots=u_t=0$, 即 $x\in(a^0,a^1,\ldots,,a^r), \sigma\cap\tau\subset(a^0,a^1,\ldots,,a^r)$.

(4) 和 (5) 是容易证明的.

若 L 是复形 K 的子复形, 一般的 $K\backslash L$ 不一定是子复形, 但我们有

命题 1.11 设 L 为复形 K 的子复形, 则存在 K 的子复形 M 使 $|M|=\overline{|K|\backslash|L|}$.

证: 令 $M=\{\sigma\text{及其所有面}\mid\sigma\in K\backslash L\}$, 则 $M\subset K$ 且满足复形的条件 (1), 故 M 为 K 的子复形.

任 $x\in|K|\backslash|L|$, 则 $x\in\sigma$, 某个 $K\backslash L$ 中单形 σ, 因此有 $x\in|M|$, 从而 $|K|\backslash|L|\subset|M|, \overline{|K|-|L|}\subset\overline{|M|}=|M|$. 反之, 任 $x\in|M|, x\in\sigma$ 的某个面, 其中 σ 是 $K\backslash L$ 的单形. 因为 σ 是 $\mathring{\sigma}$ 的闭包, 因此 x 的任一邻域与 $\mathring{\sigma}$ 相交, 即与 $|K|\backslash|L|$ 相交, 因此 $x\in\overline{|K|\backslash|L|}, |M|\subset\overline{|K|\backslash|L|}$.

$|K|$ 的拓扑是 R^m 的子空间拓扑. 下面的命题将说明这个拓扑和 $|K|$ 的下述拓扑是一致的: $|K|$ 看作它的若干个单形将其交接点粘合在一起所成的商空间.

命题 1.12 $X\subset|K|$ 是闭子集 $\Longleftrightarrow$ 对 K 的每个单形 σ,$X\cap\sigma$ 是 σ 的闭子集.

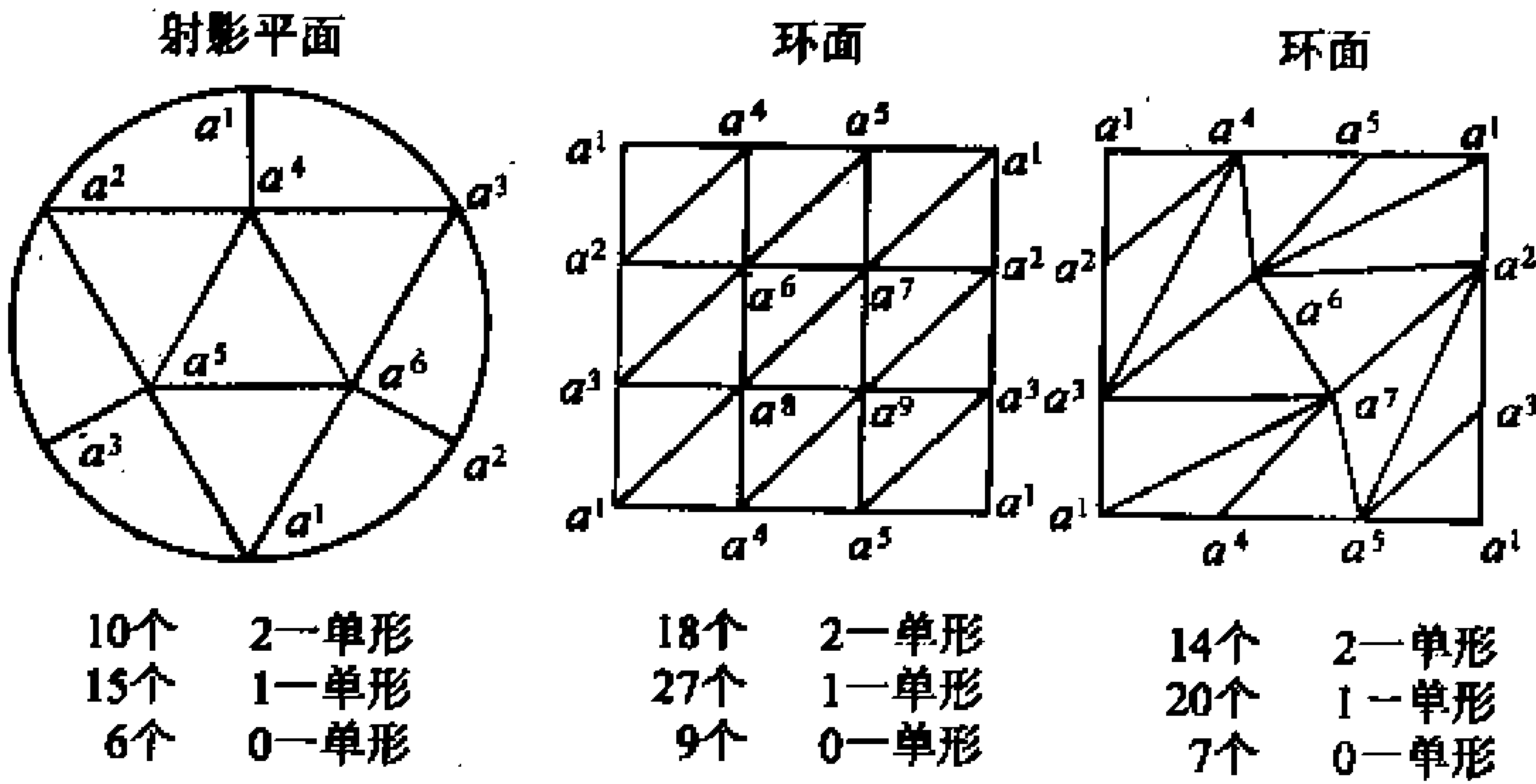
证: 必要性是显然的. 反之, 设 $X\cap\sigma$ 在 σ 中闭. 因为每个单形 σ 在 R^m 中闭, 因此 σ 在 $|K|$ 中闭. 由此得出 $X\cap\sigma$

在 $|K|$ 中闭，因此 $X=\cup_{\sigma\in K}X\cap\sigma$ 在 $|K|$ 中闭，因为 $|K|$ 是有限个单形 σ 的并集.

根据定义，多面体 $|K|$ 是由单形组合而成的，因此是“平直”的．但是有许多空间是“弯曲”的．幸运的是，在拓扑学中同胚的两个空间是不加区别的，因此我们将原来是“平直”的多面体推广到如下“弯曲”的多面体，或者叫可剖分空间．这样，它就可以包括更多的空间.

定义 1.13 (K,f) 叫做拓扑空间 X 的 **三角剖分**，如果 K 是单纯复形而 $f:|K|\to X$ 是同胚．这时，X 叫做 **可剖分空间** 或 **弯曲多面体**．注意到对可剖分空间 X,(三角) 剖分 (K,f) 不是唯一的．一般的，我们取 X 的比较“规则整齐”的剖分.

例 1.14 下面是射影平面和环面的剖分，我们用图形将 $X\cong|K|$ 的复形 K 表示出来.



例 1.15 下面是 n 维圆盘 E^n 和 $n-1$ 维球面 S^{n-1} 常用的两种剖分.

(1) 因为 $E^n\overset{f}{\cong}\sigma_n=|K(\sigma_n)|$，其中复形 $K(\sigma_n)$ 是 n 维单形 σ_n 的闭包复形，因此 $(K(\sigma_n),f)$ 是 E^n 的剖分．同样地，S^{n-1} 的剖分是单形 σ_n 的边界复形 $\dot{\sigma}_n$.

(2) 在第一章已提到，E^n 和 S^{n-1} 是欧氏空间 R^n 的如下子空间：$E^n=\{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n\mid\sum_{i=1}^n x_i^2\le 1\}, S^{n-1}=\{((x_1,\ldots,x_n)\mid\sum_{i=1}^n x_i^2=1\}$. 令

$$\overline{E^n}=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n\mid\sum_{i=1}^n|x_i|\le 1\}$$

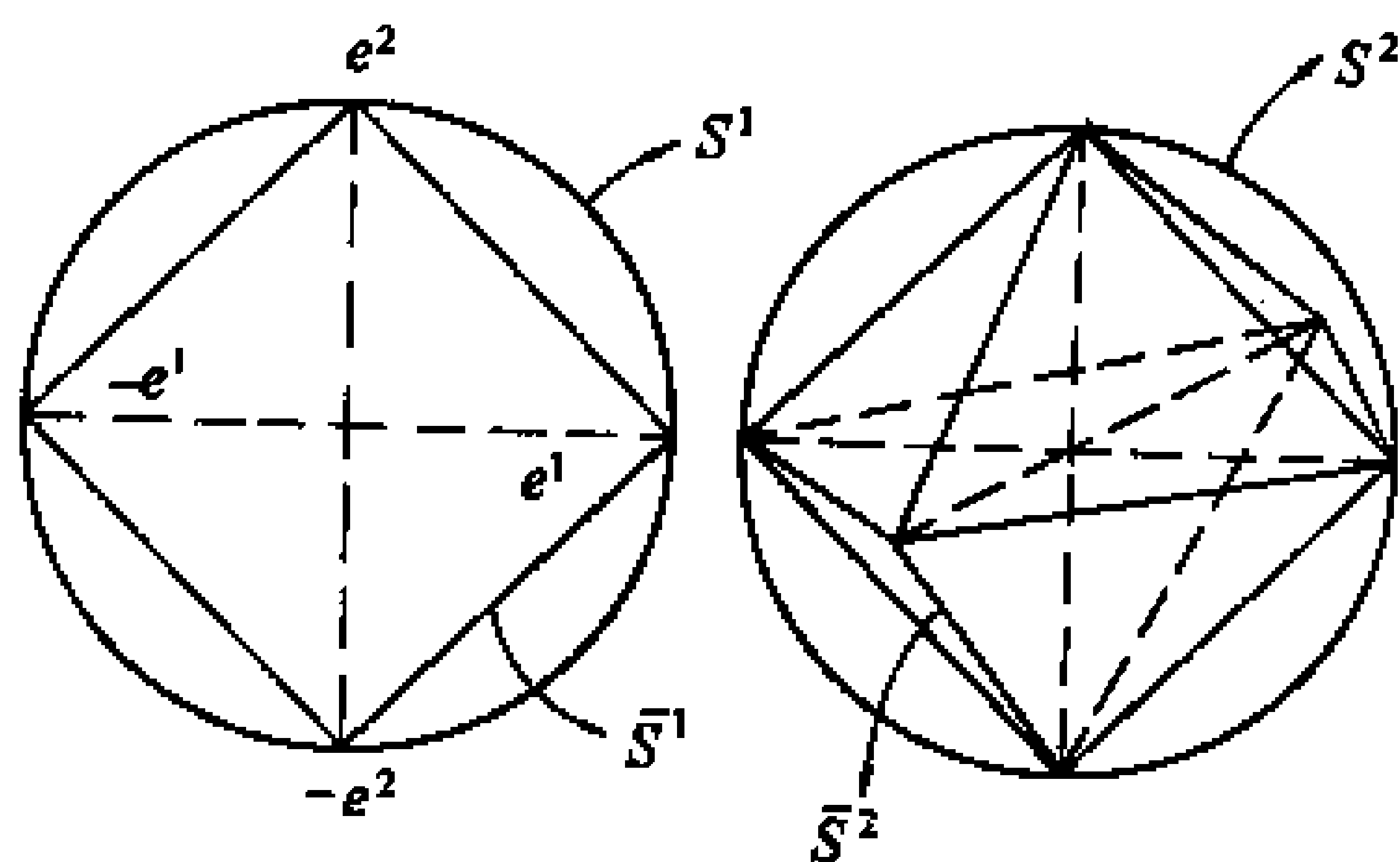
$$\overline{S}^{n-1}=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n\mid\sum_{i=1}^n|x_i|=1\}$$

以原点为中心作中心投射 $f:\overline{S}^{n-1}\to S^{n-1}$ 为 $f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{\|x\|}(x_1,\ldots,x_n), g:S^{n-1}\to\overline{S}^{n-1}, g(y_1,\ldots,y_n)=\frac{1}{\sum_{i=1}^n|y_i|}(y_1,\ldots,y_n)$, 则 f,g 为映射且 $fg=1_{S^{n-1}}, gf=1_{\overline{S}^{n-1}}$. 因此 $f:\overline{S}^{n-1}\cong S^{n-1}$. 同样地，作中心投射 $f':\overline{E}^n\to E^n$ 为 $f'(0)=0, f'(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\sum|x_i|}{\|x\|}(x_1,\ldots,x_n)$(对于非原点 $(x_1,\ldots,x_n)$)，则 f' 是同胚.

设 $e^1=(1,0,\ldots,0), e^2=(0,1,\ldots,0),\ldots,e^n=(0,0,\ldots,1)$ 为 R^n 的标准正交基，令

$$L=\{(\epsilon_1e^1,\epsilon_2e^2,\ldots,\epsilon_ne^n)\text{及其所有面}\mid\epsilon_i=\pm1\}$$

$$K=\{(0,\epsilon_1e^1,\epsilon_2e^2,\ldots,\epsilon_ne^n)\text{及其所有面}\mid\epsilon_i=\pm1\}$$



则容易验证，$|L|=\overline{S}^{n-1}, |K|=\overline{E^n}$ 且 K 是复形，L 是 K 的子复形. 因此 K 是 $\overline{E^n}$ 或 E^n 的剖分，L 是 $\overline{S}^{n-1}$ 或 S^{n-1} 的剖分.

S^{n-1} 的上述剖分 L 有 2^n 个 $n-1$ 维单形. 当 $n=3, S^{n-1}$ 就是 2 维球面 S^2, L 有 8 个 2 维单形. 这是因为 $\overline{S^2}$ 是如图的八面形. 因此这种剖分称为球 S^{n-1} 的 "八面形剖分".

如果叠合球面 S^{n-1} 的每对对径点, 就得到 $n-1$ 维射影空间 RP^{n-1}. 由 S^{n-1} 的 "八面形" 剖分 L 的对称性质, 在 §2 说明 "重心重分" 之后, L 的重心重分将对径单形叠合后就给出 RP^{n-1} 的一个剖分.

现在我们抛弃 R^m 中单形的几何内容, 将几何单形抽象成抽象单形, 将原来的几何复形抽象成抽象复形.

定义 1.16 抽象复形 $\mathcal{K}$ 是有限个称之为 *抽象顶点* 的元素 $a^0, a^1, \ldots, a^m$ 的集合, 连同其成员称为 *抽象单形* 的子集 $(a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r})$ 所组成的族, 使满足每个抽象单形的每一子集仍是抽象单形.

显而易见, 由于去掉了单形的几何内容, 因此上述抽象复形的定义中不再需要单形之间 "规则相处" 的条件 (2), 而只保留了条件 (1).

如果几何复形 K 和抽象复形 $\mathcal{K}$ 的顶点之间有一一对应 $f: K \to \mathcal{K}$ 使得 $(a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r})$ 是 K 的单形 $\Longleftrightarrow$ $(f(a^{i_0}), f(a^{i_1}), \ldots, f(a^{i_r}))$ 是 $\mathcal{K}$ 的抽象单形, 称 K 是 $\mathcal{K}$ 的几何实现.

定理 1.17 n 维抽象复形 $\mathcal{K}$ 都可在欧氏空间 R^{2n+1} 中实现.

证: 设 $\mathcal{K}$ 有 $m+1$ 个抽象顶点 $a^0, a^1, \ldots, a^m$. 我们首先用归纳法证明: 在 R^{2n+1} 中可找到 $m+1$ 个点 $A^0, A^1, \ldots, A^m$, 使它们中任意 $\leq 2n+2$ 个是几何无关的. 归纳假设在 R^{2n+1} 中已找到点组 $A^0, A^1, \ldots, A^k$ 使它们之中任意 $q \leq 2n+2$ 个点是几何无关的. 特别的, 其中任意 $q-1$ 个点决定一个 R^{2n+1} 中的 $(q-2)$ 维线性子空间. 因为从这些任意 $q-1$ 个点所得出的线性子空间是有限个, 它们的维数至多是 $2n$ 维, 因此我们能在这些线性子空间之外, 在 R^{2n+1} 中取得第 $k+2$ 个点 A^{k+1}. 容易看出, 如此得出的 $k+2$ 个点 $A^0, A^1, \ldots, A^{k+1}$, 它

们之中任意 $q \leq 2n+2$ 个点是几何无关的，完成了归纳法.

令 a^r 对应于 $A^r(0 \leq r \leq m)$，对 $\mathcal{K}$ 中每个抽象单形 $(a^{r_0}, a^{r_1}, \ldots, a^{r_k})$ 都作出R^{2n+1}的几何单形$(A^{r_0}, A^{r_1}, \ldots, A^{r_k})$. 这样就得到若干个几何单形的集合 K, K 显然满足复形的条件 (1). 设 $\sigma_p, \tau_q \in K$ 有 r 个公共点，则 σ_p 和 τ_q 一共有 $p+q-r+2 \leq 2n+2$ 个不相同的顶点. 根据以上事实，这 $p+q-r+2$ 个顶点是几何无关的，可展成一个单形 σ'. 显然 σ_p, τ_q 都是 σ' 的面从而 $\sigma_p \cap \tau_q$ 或是空集或是公共面. 因此 K 是单纯复形而且是 $\mathcal{K}$ 的几何实现.

一般的， n 维抽象复形 $\mathcal{K}$ 不一定能在 R^{2n} 中实现. 一维抽象复形 $\mathcal{K}$ 就是图论中的 图, 它能否在平面上实现是有条件的, 图论中称为可平面化条件, 是图论所研究的一部分重要内容. 在实际工作中, 无线电线路能否制成印刷电路板就是一维抽象复形可否平面化的问题.

定理 1.18 设几何复形 K_1, K_2 是同一个抽象复形 $\mathcal{K}$ 的几何实现，则存在同胚 $f\colon |K_1| \to |K_2|$ 将单形映射成同维数的单形.

证: 因为 K_1, K_2 是 $\mathcal{K}$ 的几何实现, 则存在 K_1, K_2 的顶点之间的一一对应 $f'\colon K_1 \to K_2$. 将 K_1 顶点记为 $a^0, a^1, \ldots, a^m$, 而 K_2 的顶点记为 $b^0, b^1, \ldots, b^m$, 从而 $f'(a^i) = b^i$. 对 $|K_1|$ 的每个单形 $\sigma = (a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r})$, 令 $f_\sigma\colon \sigma \to |K_2|$ 为 $f_\sigma(\sum_{j=0}^r \lambda_j a^{i_j}) = \sum_{j=0}^r \lambda_j b^{i_j}$, 容易说明在单形的交接处 $\sigma \cap \tau$ 上, $f_\sigma = f_\tau$, 由粘结引理，可作出映射 $f\colon |K_1| \to |K_2|$ 且 f 是既单又满的映射. 因为 $|K_1|$ 紧，则 f 是同胚.

利用抽象复形, 可以较好的了解两个复形的联合的概念.

定义 1.19 设抽象复形 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}$ 分别具有顶点 $a^0, a^1, \ldots$ 和 $b^0, b^1, \ldots$, 几何复形 K, L 分别是 $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ 的几何实现. 联合$\mathcal{K} * \mathcal{L}$ 定义为具有抽象顶点 $a^0, a^1, \ldots, b^0, b^1, \ldots$ 的抽象复形, 它的抽象单形是那些子集 $(a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, b^{j_0}, b^{j_1}, \ldots)$ 使得 $(a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots)$ 是 $\mathcal{K}$ 的抽象单形， $(b^{j_0}, b^{j_1}, \ldots)$ 是 $\mathcal{L}$ 的抽象单形 (特殊情况

下，$(a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots)$ 和 $(b^{j_0}, b^{j_1}, \ldots)$ 也被允许为 $K * \mathcal{L}$ 的抽象单形). 然后，$K * \mathcal{L}$ 的任一几何实现称为几何复形 K 与 L 的联合，记为 $K * L$.

容易看出，联合这种构造在 $(K * L) * M = K * (L * M)$ 的意义下是可结合的，因此对两个以上复形的联合可以直接写成 $K * L * M$.

例 1.20　例 1.15(2) 中，球面 S^{n-1} 的“八面形”剖分可看成是 $L_1 * L_2 * \cdots * L_n$，其中 L_r 是两个 0 维单形 e_r 和 $-e_r$ 所组成的单纯复形.

如果 K 是 R^m 中复形，L 是 R^n 中复形，一般的 $K * L$ 可以在 R^{m+n+1} 中实现，构作方法如下.

令 $R^{m+n+1} = R^m \times R^n \times R^1$，它的点记为 (x, y, z)，其中 $x \in R^m, y \in R^n, z \in R^1$，就是说 x 有 m 个实数坐标，y 有 n 个实数坐标，z 是一个实数. $R^m \subset R^{m+n+1}$ 作为 $(R^m, 0, 0)$, $R^n \subset R^{m+n+1}$ 作为 $(0, R^n, 1)$. 若 $(a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r})$, $(b^{j_0}, \ldots, b^{j_s})$ 分别是 K, L 的单形，则 R^{m+n+1} 中的点组 $(a^{i_0}, 0, 0), \ldots, (a^{i_r}, 0, 0), (0, b^{j_0}, 1), \ldots, (0, b^{j_s}, 1)$ 是几何无关的，它们在 R^{m+n+1} 中可展成一个几何单形 $\sigma = (a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}, b^{j_0}, \ldots, b^{j_s})$. 令 $K * L$ 是所有这些单形 σ 的集合，则它是 K 与 L 的联合.

若 x 是上述单形 $(a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}, b^{j_0}, \ldots, b^{j_s})$ 的内点，容易看出 x 有形式 $((1-\lambda)y, \lambda z, \lambda)$，其中 y 是 $(a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_r}) \subset R^m$ 的内点，z 是 $(b^{j_0}, \ldots, b^{j_s}) \subset R^n$ 的内点，而 $0 < \lambda < 1$. 因此 $|K * L| = \{((1-\lambda)x, \lambda y, \lambda) \in R^{m+n+1} | y \in |K|, z \in |L|, 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

如果 $f: |K| \to |M|, g: |L| \to |N|$ 是多面体之间的映射，定义 $f * g: |K * L| \to |M * N|$ 为 $(f * g)((1-\lambda)y, \lambda z, \lambda) = ((1-\lambda)f(y), \lambda g(z), \lambda)$，容易证明 $f * g$ 是映射.

习　题

1. q 维单形 $(a^0, a^1, \ldots, a^q)$ 一共有多少面？

2. 设 b^i 是同一单形 σ 的点 $(i = 0, 1, 2, \ldots, r)$，证明：$b = \sum_{i=0}^{r} u_i b^i \quad (u_i \geq 0, \quad \sum u_i = 1)$ 也是 σ 的点.

3. 设 b^i 是单形 σ 的点 $(i = 0, 1, \ldots, r)$，证明：若 $b = \sum_{i=0}^{r} u_i b^i, u_i > 0, \sum u_i = 1$ 是 σ 的一个顶点 a^0，则每点 b^i 也是 a^0.

4. 设 N 是闭包复形 $K(\sigma_q)$ 的子复形，$b^i \in \mid N \mid (i = 0, 1, \ldots, r)$，试证：$b = \sum u_i b^i, u_i > 0, \sum u_i = 1$ 是 $\mid N \mid$ 的点当且仅当 b^i 是 N 的同一个单形的点.

5. 试作出 Klein 瓶的一个剖分.

6. 试说明例 1.14 的射影平面减去中心三角形是一个 Möbius 带.

7. 设复形 K 是闭包复形 $K(\sigma_5)$ 的所有维数 ≤ 2 的单形所组成的子复形，试说明 K 是由两个射影平面 (参看例 1.14) 拼成的.

8. 试举例说明：两个复形的交的多面体不一定是原来的两个多面体的交.

9. 设 M 同时是复形 K, L 的子复形，使得 $\mid K \mid \cap \mid L \mid = \mid M \mid$，证明：$K \cup L$ 也是复形且 $\mid K \cup L \mid = \mid K \mid \cup \mid L \mid$.

10. 设 K 是具有顶点 a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 的一维抽象复形，使每一对顶点都是 1 维抽象单形，证明：K 在 R^2 中不可实现. (提示：不然的话，先考虑四个顶点 a^0, a^1, a^2, a^3. 证明它们中的每三个展成 2- 单形，使第四个顶点在其内部，再证明第 5 个顶点不可能在这个三角形的外部或内部.)

11. 设 P 为独点集，$S^0 = \{-1, +1\}$ 为两点集. 证明：$\mid P * K \mid \cong C \mid K \mid, \mid S^0 * K \mid \cong S \mid K \mid$，其中 K 为单纯复形，CX 为 X 上锥形，SX 为双角锥，其定义见第一章 §8 习题 9.

§2 多面体的连通性

如第一章中定义拓扑空间的连通性和连通分支一样，我们可以定义复形 K 的连通性等概念.

定义 2.1 称复形 K 是连通的，如果它不是两个非空的，不相交的子复形的并集. 若复形 K 的子复形 L 是连通的，并且它不是 K 的另一个连通子复形的真子复形，称 L 为 K 的一个连通分支.

命题 2.2 (1) 复形 K 连通的充分必要条件是：对 K 的任意两个顶点 a 与 b, 存在 K 的一序列顶点

$$a = a^0, a^1, \ldots, a^{n-1}, a^n = b$$

使 (a^i, a^{i+1}) 都是 K 的一维单形， $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

(2) 任意一个复形 K 可分解成 r(有限) 个连通分支 $K_1, K_2, \ldots, K_r$, 并且 K 是这些不交分支的并集.

证： (1) 必要性. 我们将满足上述性质的 K 的顶点 a, b 称作 a, b 可联结，记为 $a \sim b$. 显然这是 K 的顶点集上的一个等价关系. 如果 K 的顶点 a, b 不可联结，则 K 的零维架 K^0(即 K 的顶点集合) 分成至少两个等价类 $K_1^0, \ldots, K_r^0$, 并且使 a, b 属于同一个 K_i^0 当且仅当 a, b 可联结. 对每个单形 $\sigma \in K, \sigma$ 的顶点必定同属于某一个 K_i^0. 令 $K_i = \{\sigma \in K \mid \sigma$ 的顶点都属于 $K_i^0\}$, 则 $K_1, \ldots, K_r$ 是不相交的非空子复形使 $K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_r$, 即 K 不连通，与假设矛盾.

充分性. 反设 K 不连通，则 K 是不相交的非空子复形 K_1, K_2 的并集. 取顶点 $a \in K_1, b \in K_2$, 由设存在一序列 K 的顶点 $a = a^0, a^1, \ldots, a^{n-1}, a^n = b$ 使 (a^i, a^{i+1}) 为 K 的一维单形， $i = 0, 1, \ldots, n-1$. 令 $a^0, a^1, \ldots, a^n$ 和所有的一维单形 (a^i, a^{i+1}) 所组成的复形为 L, 因此 $L = K_1 \cap L \cup K_2 \cap L$, 而 $K_1 \cap L$ 和 $K_2 \cap L$ 是不相交的非空子复形. 由于 $a = a^0 \in K_1$, 假设 $a^1 \in K_1 \cap L$ 则 $(a^0, a^1) \in K_1 \cap L$ 如此类推总有一个 a^i 使 $a^i \in K_1 \cap L$ 而 $a^{i+1} \in K_2 \cap L$. 这时若 $(a^i, a^{i+1}) \in K_1 \cap L$,

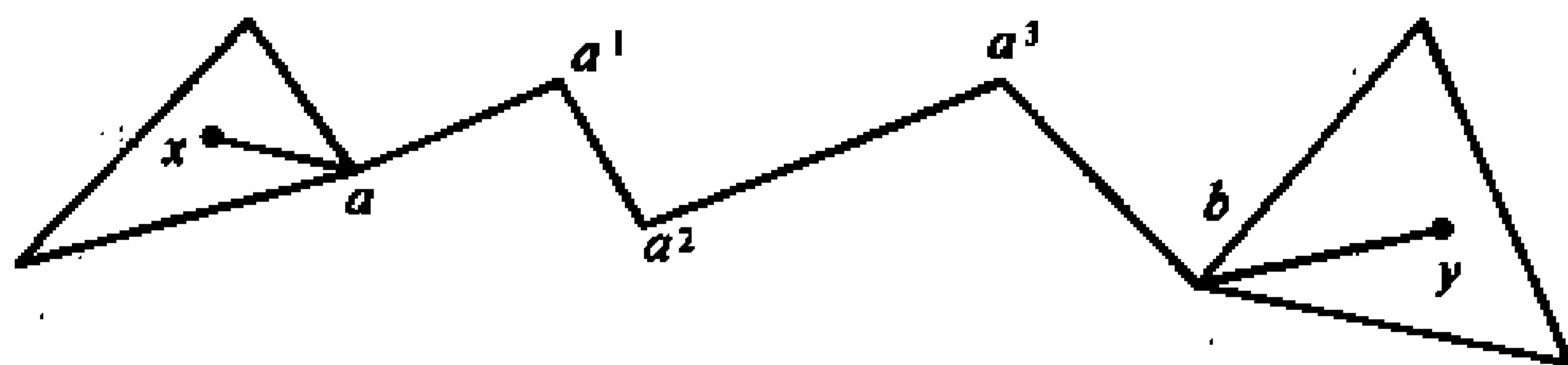
则 $a^{i+1}\in K_1\cap L\bigcap K_2\cap L$, 导出矛盾. 若 $(a^i,a^{i+1})\in K_2\cap L$, 则 $a^i\in K_1\cap L\bigcap K_2\cap L$, 也导出矛盾.

(2) 其证明已含在 (1) 的必要性证明之中. 证毕.

推论 2.3 多面体 $|K|$ 的连通分支恰是 $|K_1|,\ldots,|K_r|$, 其中 $K_1,\ldots,K_r$ 是复形 K 的连通分支.

定理 2.4 多面体 $|K|$ 连通当且仅当 $|K|$ 道路连通.

证: 设 $|K|$ 连通且 x 与 y 为 $|K|$ 中任意的点. 因此 $x\in\sigma,y\in\tau$ 而 σ,τ, 为复形 K 的某两个单形. 设 a, b 分别是单形 σ,τ 的顶点, 则 x 与 a 同在单形 σ 中, x 与 a 有道路 $u{:}\,I\to|K|$ 连接, 其中 $u(t)=ta+(1-t)x, 0\le t\le 1$, 同样的, b 与 y 有道路 $v{:}\,I\to|K|$ 连接. 由命题 2.2, 存在 K 的一序列顶点 $a=a^0,a^1,\ldots,a^{n-1},a^n=b$ 使 (a^i,a^{i+1}) 都是 K 的一维单形, $i=0,1,\ldots,n-1$. 从直观看出, a 与 b 在 $|K|$ 中可由折线段 $(a^0,a^1),\ldots,(a^{n-1},a^n)$ 连接, 即有一个道路 $\omega{:}\,I\to|K|$ 连接 a 与 b, 这里 ω 可定义为 $\omega(t)=(nt-i)a^{i+1}+(1-nt+i)a^i$ 当 $\frac{i}{n}\le t\le\frac{i+1}{n}, i=0,1,\ldots,n-1$.



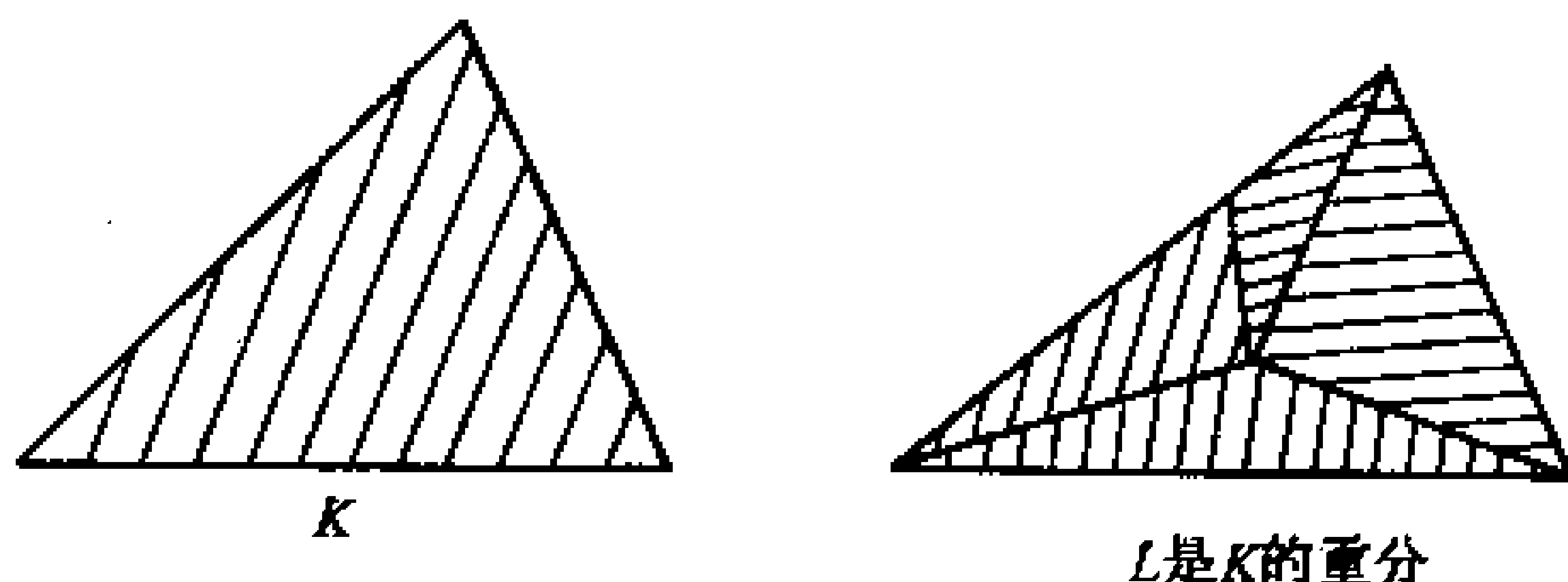
最后可以得出, x 与 y 有道路 $h{:}\,I\to|K|$ 连接, 这个道路 h 是经过 u,ω,v 连接起来的道路, 其定义为

$$h(t)=\begin{cases} u(3t) & 0\le t\le\frac{1}{3}\\ \omega(3t-1) & \frac{1}{3}\le t\le\frac{2}{3}\\ v(3t-2) & \frac{2}{3}\le t\le 1\end{cases}$$

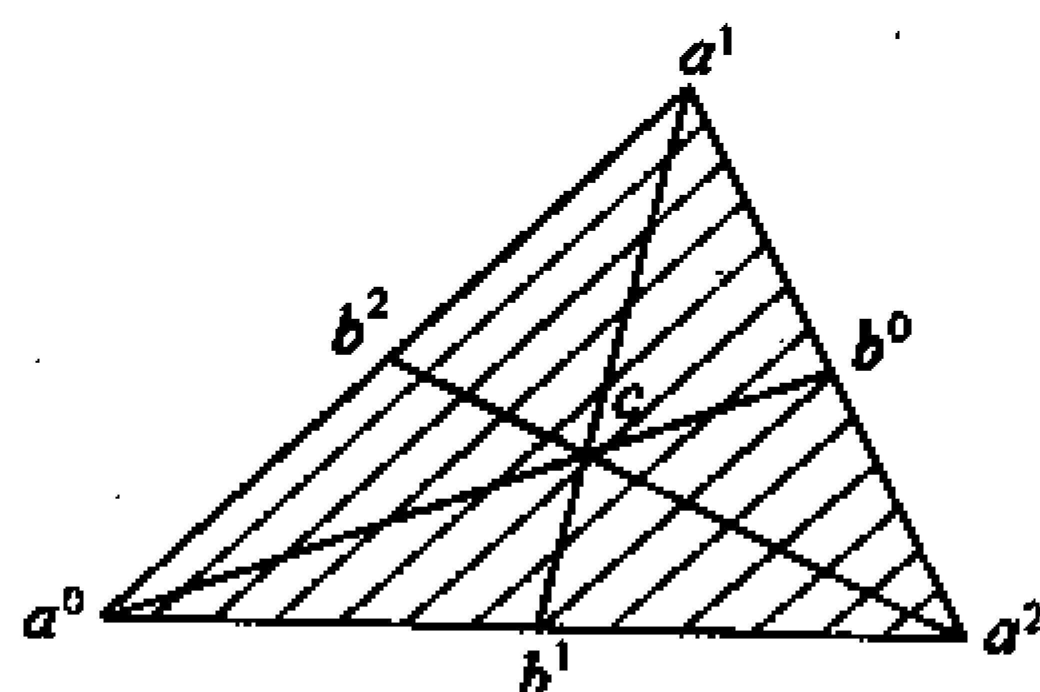
因此 $|K|$ 道路连通. 证毕.

§3 重心重分和单纯逼近

复形 K 是多面体 $|K|$ 的单纯剖分. 或通俗的说, K 是由剖分多面体 $|K|$ 成为若干个小块而得到. 因而 K 的 重分L 是由重新剖分 $|K|$ 成为若干个更小的小块而得到.



定义 3.1 复形 L 叫做复形 K 的 重分, 如若 $|L|=|K|$, 而且 L 的每个单形都包含在 K 的某个单形中. 可见, 重分具有重新剖分之意.



下面我们讨论最简便, 也是最整齐的一种重分 - 重心重分. 先用直观例子说明. 取最简单的一种复形 $K=K(\sigma),\sigma=(a^0,a^1,a^2)$. 令 $b^0=\frac{1}{2}(a^1+a^2)$, $b^1=\frac{1}{2}(a^0+a^2)$, $b^2=\frac{1}{2}(a^0+a^1)$ 分别为单形 $(a^1,a^2),(a^0,a^2),(a^0,a^1)$ 的重心. $c=\frac{1}{3}(a^0+a^1+a^2)$ 为 σ 的重心. 增加这些重心作为顶点组成如图所示的复形 K' 叫做 K 的重心重分. 重心重分需要用归纳法定义.

定义 3.2 复形 K 的重心重分 K' 归纳定义如下. 设 K^r 为 K 的 r 维架, 这是 K 的子复形. 定义 $(K^0)'=K^0$. 假设 $(K^r)'$ 已定义使满足:

(a) $(K^r)'$ 是单纯复形使得 $|(K^r)'|=|K^r|$

(b) $(K^r)'$ 每个单形包含在 K^r 的某个单形中.

(c) 若 N 是 K^r 的子复形, 则存在 $(K^r)'$ 的子复形 N', 使 $|N|=|N'|$

今定义 $(K^{r+1})'=(K^r)'\cup\{\hat{\sigma}\tau\}\cup\{\hat{\sigma}\}$, 其中 $\hat{\sigma}$ 表示 σ 的重心, 取并集时 σ 取遍 K 的 $r+1$ 维单形, τ 取遍 $(\dot{\sigma})'$. 根据归纳假设 (c) ,$(\dot{\sigma})'$ 是 $(K^r)'$ 的子复形, 已经存在.

命题 3.3 上述定义的 $(K^{r+1})'$ 仍满足条件 (a)—(c), 因此根据归纳法, 我们可一直作到 $(K^n)'=K'$, 其中 n 是 K 的维数从而 $K^n=K$.

证: (a) $(K^{r+1})'$ 的任一单形 η, 若 $\eta\in(K^r)'$, 则 η 的面仍属于 $(K^r)'\subset(K^{r+1})'$. 若 $\eta=\hat{\sigma}\tau$, 则 η 的面可能是 0 维单形 $\hat{\sigma}$ 或单形 $\hat{\sigma}\xi(\xi<\tau)$. 由 $(K^{r+1})'$ 定义, η 的面 $\in(K^{r+1})'$.

$(K^{r+1})'$ 的任两个单形 ξ,η 是否"规则相处", 分三种情形讨论. 首先, $\xi\in(K^r)'$ 而 $\eta=\hat{\sigma}\tau$, 则 $\xi\cap\eta=\xi\cap\tau$ 因为 $\sigma\notin K^r$. 由归纳假设, 这将是空集或公共面. 其次, $\xi=\hat{\sigma}\tau,\eta=\hat{\sigma}\mu$, 则 $\xi\cap\eta=\hat{\sigma}(\tau\cap\mu)$. 而显然 $\tau\cap\mu$ 是空集或公共面. 最后一个情况是 $\xi=\hat{\sigma}\tau,\eta=\hat{\nu}\mu,\sigma\neq\nu$. 这时 $\xi\cap\eta=\tau\cap\mu$, 显然也是"规则相处".

另外,

$$\begin{aligned}|(K^{r+1})'| &= |(K^r)'|\cup\hat{\sigma}\tau,\sigma\text{取遍}K\text{的}r+1\text{维单形},\tau\text{取遍}(\dot{\sigma})'\\ &= |K^r|\cup\sigma,\quad \sigma\text{取遍}K\text{的}r+1\text{维单形}\\ &= |K^{r+1}|\end{aligned}$$

(b) $(K^{r+1})'$ 的任一单形 η, 若 $\eta\in(K^r)'$, 则由归纳假设 (b), 结论成立. 若 $\eta=\hat{\sigma}\tau$, 则显然 $\eta\subset\sigma$.

(c) 因为 N 是 K^{r+1} 的子复形, 则 $N\cap K^r$ 是 K^r 的子复形. 由归纳假设, 存在 $(K^r)'$ 的子复形 P', 使 $|N\cap K^r|=|P'|$. 令 $N'=P'\cup\{\hat{\sigma}\tau\}\cup\{\hat{\sigma}\}$, 其中 σ 取遍 $N\cap K$ 的 $r+1$ 维单形,

τ 取遍 $(\dot{\sigma})'$ 的单形. 容易证明 $|N'|=|P'|\cup\hat{\sigma}\tau=|N\cup K^r|\cup\sigma=|N\cap K^{r+1}|=|N|$.

下面我们指出, 重心重分 K' 的单形的顶点, 都是 K 中某个单形 σ 的重心 $\hat{\sigma}$.

定理 3.4 复形 K 的重心重分 K' 的每个单形形如 $(\hat{\sigma}_m, \hat{\sigma}_{m-1}, \ldots, \hat{\sigma}_0)$, 其中 $\sigma_i \in K$ 且 $\sigma_0 < \cdots < \sigma_{m-1} < \sigma_m$ 是真面序列. 反之, 每个这种形式的单形属于 K'.

证: 必要性用归纳法证明. 设结论对$(K^r)'$已成立. $(K^{r+1})'$ 的每一个单形 η, 若 $\eta \in (K^r)'$ 则结论由归纳假设得出. 若 $\eta = \hat{\sigma}_m\tau$, 则 $\tau \in (\dot{\sigma}_m)'$, 这是 $(K^r)'$ 的子复形, 从而由归纳假设有 $\tau = (\hat{\sigma}_{m-1}, \ldots, \hat{\sigma}_0)$ 使 $\sigma_0 < \cdots < \sigma_{m-1}$ 为真面序列. 因为 $\tau \subset |\dot{\sigma}_m|$, 又 $\tau \subset \sigma_{m-1}$, 因此 $\sigma_{m-1} < \sigma_m$ 从而有 $\eta = (\hat{\sigma}_m, \hat{\sigma}_{m-1}, \ldots, \hat{\sigma}_0)$ 而 $\sigma_0 < \cdots < \sigma_{m-1} < \sigma_m$ 为真面序列.

反过来的结论可由 K' 的定义直接得出.

下面指出重心重分可继续作下去. 定义 K 的二次重心重分 $K'' = (K')'$ 而 K 的 n 次重心重分 $K^{(n)} = (K^{(n-1)})'$.

下面讨论单纯映射和多面体之间映射的单纯逼近问题. 这是研究多面体性质时的重要工具.

定义 3.5 已给复形 K 和 L, 对应 $f: |K| \to |L|$ 称为 **单纯映射**, 如果 f 满足

(a) 对 K 的每一顶点 a, $f(a)$ 是 L 的顶点.

(b) 若 $(a^0, a^1, \ldots, a^n)$ 是 K 的单形, 则 $f(a^0), f(a^1), \ldots, f(a^n)$(可能有重复) 展成 L 的一个单形.

(c) 若 $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a^i$ 是 K 的单形 $(a^0, a^1, \ldots, a^n)$ 中的一个点, 则 $f(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(a^i)$, 换句话说, f 在每个单形上是 "线性" 的.

下面将证明单纯映射是连续的, 故称为映射. 从定义看出 f 将 K 的单形 $(a^0, a^1, \ldots, a^n)$ 映成 L 的单形 $(f(a^0), f(a^1), \ldots, f(a^n))$. 但后者诸顶点中可能有重复, 称为 **退化单形**. 若诸顶

点都互不重复，则称为 **非退化单形**.

命题 3.6 单纯映射 $f:|K|\to|L|$ 是连续的.

证：设 X 为 $|L|$ 的闭子集. 因为 f 在单形 σ 上是"线性"的，故连续，因此 $(f|_\sigma)^{-1}(X)=f^{-1}(X)\cap\sigma$ 是 σ 的闭子集. 因此 X 是 $|K|$ 的闭集.

为了讨论映射的单纯逼近，先引进承载子这个名词.

定义 3.7 多面体 $|K|$ 的任一点 x, 必属于 K 的唯一单形 τ 的内部 (见命题 1.10(2)),τ 称为 x 在 K 中的 **承载单形**，记为 $\tau=\mathrm{Car}_K(x)$.

定义 3.8 单纯映射 $\varphi:|K|\to|L|$ 叫做映射 $f:|K|\to|L|$ 的 **单纯逼近**, 如果对任 $x\in|K|,\varphi(x)\in\mathrm{Car}_Lf(x)$.

这就是说对每点 $x\in|K|,\varphi(x)$ 和 $f(x)$ 在同一个单形中，在某种程度上 $\varphi(x)$"逼近"$f(x)$.

对单形 $\sigma\in K$, 我们定义开星形 $\mathrm{st}_K\sigma=\cup_{\sigma<\tau}\mathring{\tau}$, 即所有以 σ 为面的单形 τ 的内部 $\mathring{\tau}$ 的并集. $\mathrm{st}_K\sigma$ 是 $|K|$ 的开子集.

命题 3.9 单纯映射 $\varphi:|K|\to|L|$ 是映射 $f:|K|\to|L|$ 的单纯逼近当且仅当对 K 的每一顶点 a 有 $f(\mathrm{st}_Ka)\subset\mathrm{st}_L\varphi(a)$ (称为 **星形条件**).

证：必要性. 任意 $x\in\mathrm{st}_Ka=\cup_{a<\tau}\mathring{\tau}$, 则 $x\in\mathring{\tau}$, 某个以 a 为顶点的单形 τ, 即 $\tau=\mathrm{Car}_Kx,a<\mathrm{Car}_Kx$. 因此由 φ 是单纯映射得出 $\varphi(a)<\varphi(\mathrm{Car}_Kx)=\mathrm{Car}_L\varphi(x)$. 另一方面，$\varphi$ 是 f 的单纯逼近，因此，$\mathrm{Car}_L\varphi(x)<\mathrm{Car}_Lf(x)$ 从而有 $\varphi(a)<\mathrm{Car}_Lf(x)$. 因此，$f(x)\in\mathrm{st}_L\varphi(a)$.

充分性. 任 $x\in|K|,x$ 是唯一单形 $\tau=(a^0,a^1,\ldots,a^n)$ 的内点，因此 $x\in\mathrm{st}_Ka^i$, 从而 $f(x)\in f(\mathrm{st}_Ka^i)\subset\mathrm{st}_L\varphi(a^i),i=0,1,\ldots,n$, 设 η 是以 $\varphi(a^0),\ldots,\varphi(a^n)$ 为面的 L 中的单形，则 $f(x)\in\mathring{\eta}$, 从而 $\varphi(x)\in\eta=\mathrm{Car}_Lf(x)$.

一般的，映射 $f:|K|\to|L|$ 不一定存在单纯逼近，下面是 f 有单纯逼近的充分条件.

定理 3.10 设 $f:|K|\to|L|$ 为映射，而且对 K 的每一顶点 a, 存在 L 的顶点 b 使 $f(\mathrm{st}_K a)\subset \mathrm{st}_L b$ (称为星形条件), 则 f 有单纯逼近 $\varphi:|K|\to|L|$ 使 $\varphi(a)=b$.

证：作顶点对应 $\varphi: K\to L$ 定义为 $\varphi(a)=b$. 对 K 的单形 $\tau=(a^0,a^1,\ldots,a^n)$, 设 $x\in\mathring{\tau}$, 则 $x\in \mathrm{st}a^0\cap\mathrm{st}a^1\cap\cdots\cap\mathrm{st}a^n$. 由此得出 $f(x)\in f(\mathrm{st}a^0)\cap\cdots\cap f(\mathrm{st}a^n)\subset \mathrm{st}\varphi(a^0)\cap\cdots\cap\mathrm{st}\varphi(a^n)$, 从而有 $f(x)\in\mathrm{st}\varphi(a^i), i=0,1,\ldots,n$. 另外 $f(x)\in\mathring{\tau}_1$, 其中 $\tau_1=\mathrm{Car}_L f(x)$. 因此 τ_1 以 $\varphi(a^0),\ldots,\varphi(a^n)$ 为它的顶点，从而 $\varphi(a^0),\ldots,\varphi(a^n)$ 必展成 L 的一个单形. 令 $\varphi:|K|\to|L|$ 定义为 $\varphi(x)=\sum\lambda_i\varphi(a^i)$, 当 $x=\sum\lambda_i a^i\in(a^0,\ldots,a^n)$, 则 φ 满足定义 3.5(a)–(c), 是单纯映射，而且由命题 3.9, φ 是 f 的单纯逼近.

定理 3.11 (1) 设 $f:|K|\to|L|$ 有单纯逼近 $\varphi:|K|\to|L|$, 则 $f\simeq\varphi \quad \mathrm{rel}A$, 其中 $A=\{x\in|K|\mid f(x)=\varphi(x)\}$.

(2) 若单纯映射 φ_1,φ_2 是映射 $f_1:|K|\to|L|, f_2:|L|\to|M|$ 的单纯逼近，则 $\varphi_2\varphi_1$ 是 f_2f_1 的单纯逼近.

证： (1) 根据单纯逼近定义， $\varphi(x)\in\mathrm{Car}_L f(x)$, 但是 $f(x)\in\mathrm{Car}_L f(x)$, 因此 $\varphi(x)$ 和 $f(x)$ 在 L 的同一个单形中, $\varphi(x)$ 和 $f(x)$ 在 $|L|$ 中可用线段连接. 由第一章 §9 定理 9.3, $f\simeq\varphi \quad \mathrm{rel}A$.

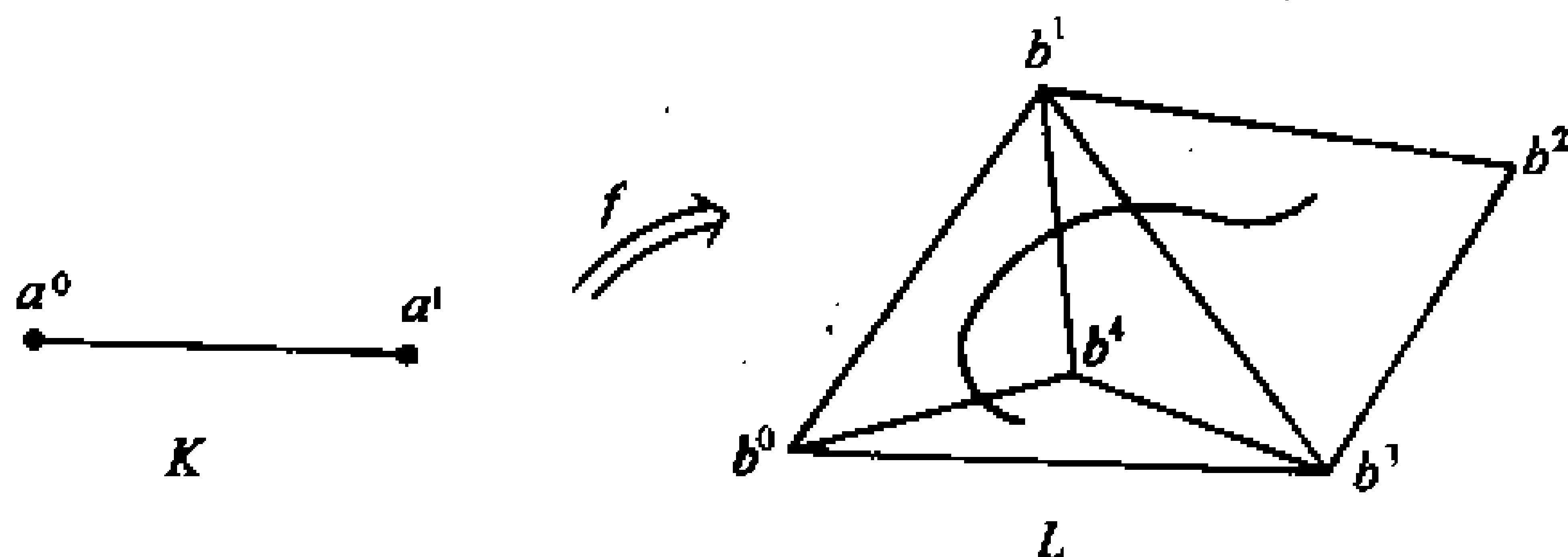
(2) 的证明留给读者.

推论 3.12 设 $f:(|K|,|L|)\to(|M|,|N|)$ 是多面体偶之间的映射. 若 $\varphi:|K|\to|M|$ 是 f 的单纯逼近，则 $\varphi(|L|)\subset|N|$, 且 $f\simeq\varphi:(|K|,|L|)\to(|M|,|N|)$.

证：任意 $x\in|L|$, 则 $f(x)\in|N|$, 从而 $\mathrm{Car}_M f(x)\in N$. 另一方面， φ 是 f 的单纯逼近，有 $\varphi(x)\in\mathrm{Car}_M f(x)$, 从而 $\varphi(x)\in|N|$. 和定理 3.11 证明类似， $\varphi(x)$ 和 $f(x)$ 在同一个单形中， $f\simeq\varphi:(|K|,|L|)\to(|M|,|N|)$.

例 3.13 设 K,L 为如下图所示的两个复形， $f:|K|\to|L|$ 为映射将 1 维单形 (a^0,a^1) 映射成图中的曲线. 容易看

出 $f(\text{st}a^0) = f([a^0, a^1))$ 不包含在任一个 $\text{st}_L b^i$ 中，即 f 不满足星形条件. 因此，一般的 f 不一定有单纯逼近. 但是若将 K 作二次重心重分 K'',(即将闭区间 $[a^0, a^1]$ 四等分作成的复形), 则 f 将会满足星形条件，从而 f 有单纯逼近. 这就是说，尽管 $f: |K| \to |L|$ 不一定有单纯逼近，但当 n 充分大时，$f: |K^{(n)}| \to |L|$ 会有单纯逼近. 这将是下面单纯逼近存在定理所叙述的.



定义 3.14 (1) 多面体 $|K|$ 的子集族 $\{\text{st}_K a \mid a$ 为 K 的顶点$\}$ 称为 $|K|$ 的 *星形覆盖*.

(2) $|K|$ 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的网径 $\text{mesh}\{U_\alpha\} = sup\{\text{diam}U_\alpha\}$.

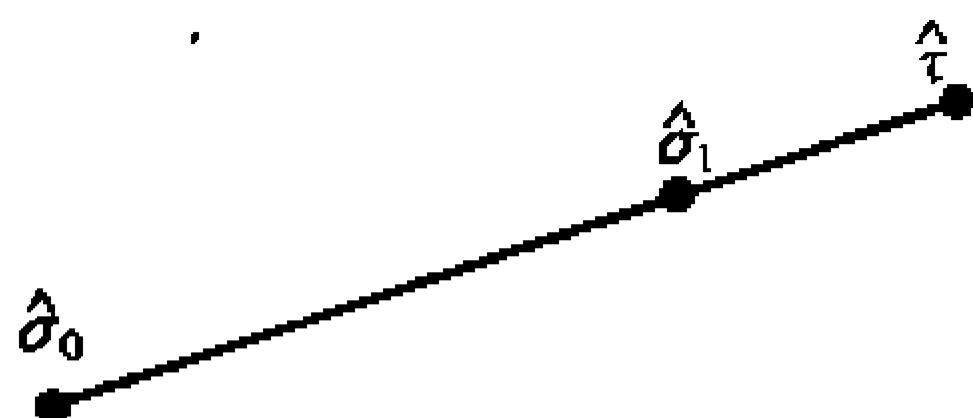
(3) $|K|$ 的网径 $\text{mesh}K = \text{mesh}\{\text{st}_K a \mid a$为 K 的顶点$\}$.

命题 3.15 任给复形 K 和正数 ϵ, 存在正整数 r 使 $\text{mesh}\, K^{(r)} < \epsilon$.

证: 设 λ 为 K 的 1 维单形长度的最大值，则对 K 中每一单形 σ, 有 $\text{diam}\sigma \leq \lambda$(习题 1). 设 a 为 K 的任一顶点，$x \in \text{st}a = \cup_{a<\tau} \mathring{\tau}$, 因此 $x \in \mathring{\tau}$, 某个以 a 为顶点的单形 τ, 从而 $\rho(x, a) \leq \lambda, \text{diam}(\text{st}a) \leq 2\lambda$. 因此 $\text{mesh}K \leq 2\lambda$. K' 的一维单形形如 $(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_0), \sigma_0 < \sigma_1$(参见定理 3.4). 令 $\sigma_0 = (a^0, a^1, \ldots, a^p), \sigma_1 = (a^0, a^1, \ldots, a^p, \ldots, a^q)$, 并且记 $\tau = (a^{p+1}, \ldots, a^q)$, 因此有

$$\hat{\sigma}_0 = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{p+1} a^i, \qquad \hat{\tau} = \sum_{i=p+1}^{q} \frac{1}{q-p} a^i$$

$$\hat{\sigma}_1 = \sum_{i=0}^{q} \frac{1}{q+1} a^i = \frac{p+1}{q+1}\hat{\sigma}_0 + \frac{q-p}{q+1}\hat{\tau}$$



并且 $\rho(\hat{\sigma}_0,\hat{\sigma}_1) = \frac{q-p}{q+1}\rho(\hat{\sigma}_0,\hat{\tau}) \le \frac{q}{q+1}\lambda \le \frac{n}{n+1}\lambda$, 其中 n 为 K 的维数. 这就是说, K' 的 1 维单形的最大长度 $\le \frac{n}{n+1}\lambda$, 因此 $\text{mesh}K^{(r)} \le 2[K^{(r)}$的 1 维单形的最大长度$] \le 2(\frac{n}{n+1})^r\lambda$. 这个数字当 $r \longrightarrow \infty$ 趋向于 0. 命题得证.

定理 3.16(单纯逼近存在定理) 任意映射 $f\colon |K| \to |L|$, 存在正整数 r 使 $f\colon |K^{(r)}| \to |L|$ 有单纯逼近.

证: 设$\{\text{st}_L b \mid b$为 L 的顶点$\}$是 L 的星形覆盖, 则$\{f^{-1}\text{st}_L b\}$是 $|K|$ 的开覆盖. 由 $|K|$ 紧, 存在 Legesgue 数 $\delta > 0$, 使 $|K|$ 中直径小于 δ 的子集 S 包含在某一个 $f^{-1}\text{st}_L b$ 中. 取正整数 r 使 $\text{mesh}K^{(r)} < \frac{\delta}{2}$, 则对 $K^{(r)}$ 的任一顶点 a, $\text{st}_K a$ 的直径 $< \delta$ 从而存在 b 使 $\text{st}_{K^{(r)}} a \subset f^{-1}(\text{st}_L b)$. 这就是说 $f\colon |K^{(r)}| \to |L|$ 满足定理 3.10 的星形条件, f 有单纯逼近.

最后, 我们叙述恒等映射 $1\colon |K'| \to |K|$ 的一个特殊的单纯逼近, 这将在后面经常使用.

命题 3.17 存在恒等映射 $1\colon |K'| \to |K|$ 的单纯逼近 h, 使对 K 的每一单形 σ, $h(\hat{\sigma}) = a$, 其中 a 为 σ 的一个顶点.

证: 由定理 3.10, 只需证明 $\text{st}_{K'}(\hat{\sigma}) \subset \text{st}_K a$. 设 τ 是 K' 的一个单形, 并且以 $\hat{\sigma}$ 为一个顶点. 由重心重分定义, 存在 K 的单形 μ 使 $\tau \subset \mu$. 因为 $\hat{\sigma} \in \mu$, 则 $\sigma < \mu$ 从而有 $a < \mu$. 因此 $\mathring{\tau} \subset \mathring{\mu} \subset \text{st}_K a$. 注意到 $\text{st}_{K'}(\hat{\sigma}) = \cup_{\hat{\sigma} < \tau} \mathring{\tau}$, 则 $\text{st}_{K'}(\hat{\sigma}) \subset \text{st}_K a$.

习　题

1. R^m 中单形 σ 的直径 $\text{diam}\sigma = \sigma$ 的 1 维面长度的最大

值.

2. 设单形 $\sigma=(a^0,a^1,\ldots,a^q),\sigma_i=(a^0,a^1,\ldots,a^i)$. 设 $x\in\eta=(\hat{\sigma}_0,\hat{\sigma}_1,\ldots,\hat{\sigma}_q)$, 而且它在 σ 中重心坐标为 $(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_q)$, 在 η 中重心坐标为 $(\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_q)$, 求矩阵 A 使

$$(\lambda_0,\ldots,\lambda_q)'=A(\mu_0,\ldots,\mu_q)'$$

3. 设 $\varphi:|K|\to|L|$ 为单纯映射, $|L_0|$ 是 $|L|$ 的子多面体. 证明: $\varphi^{-1}(|L_0|)$ 是 $|K|$ 的子多面体.

4. 设 $f:|K|\to|L|$ 为单纯映射, 令 $f'(\hat{\sigma})=f(\sigma)$ 的重心, 它是从 K' 到 L' 的顶点的单值对应. 证明: f' 决定一个单纯映射 $f':|K'|\to|L'|$.

5. R 中单纯复形 $K=\{0,5,[0,5]\},L=\{0,1,5,[0,1],[1,5]\}$ 从而 $|K|=|L|$. 试说明恒等映射 $1:|K^{(n)}|\to|L|$ 不存在单纯逼近, 并指出 n 最小是多少使 $1:|K^{(n)}|\to|L|$ 有单纯逼近.

6. 设 X,Y 为多面体. 利用单纯逼近定理证明: 同伦类集合 $[X,Y]$ 是可数集.

7. 利用单纯逼近定理及第一章 §9 习题 2 证明: 设 $\dim K<n$, 则任意映射 $f:|K|\to S^n$ 零伦.

第三章 基本群

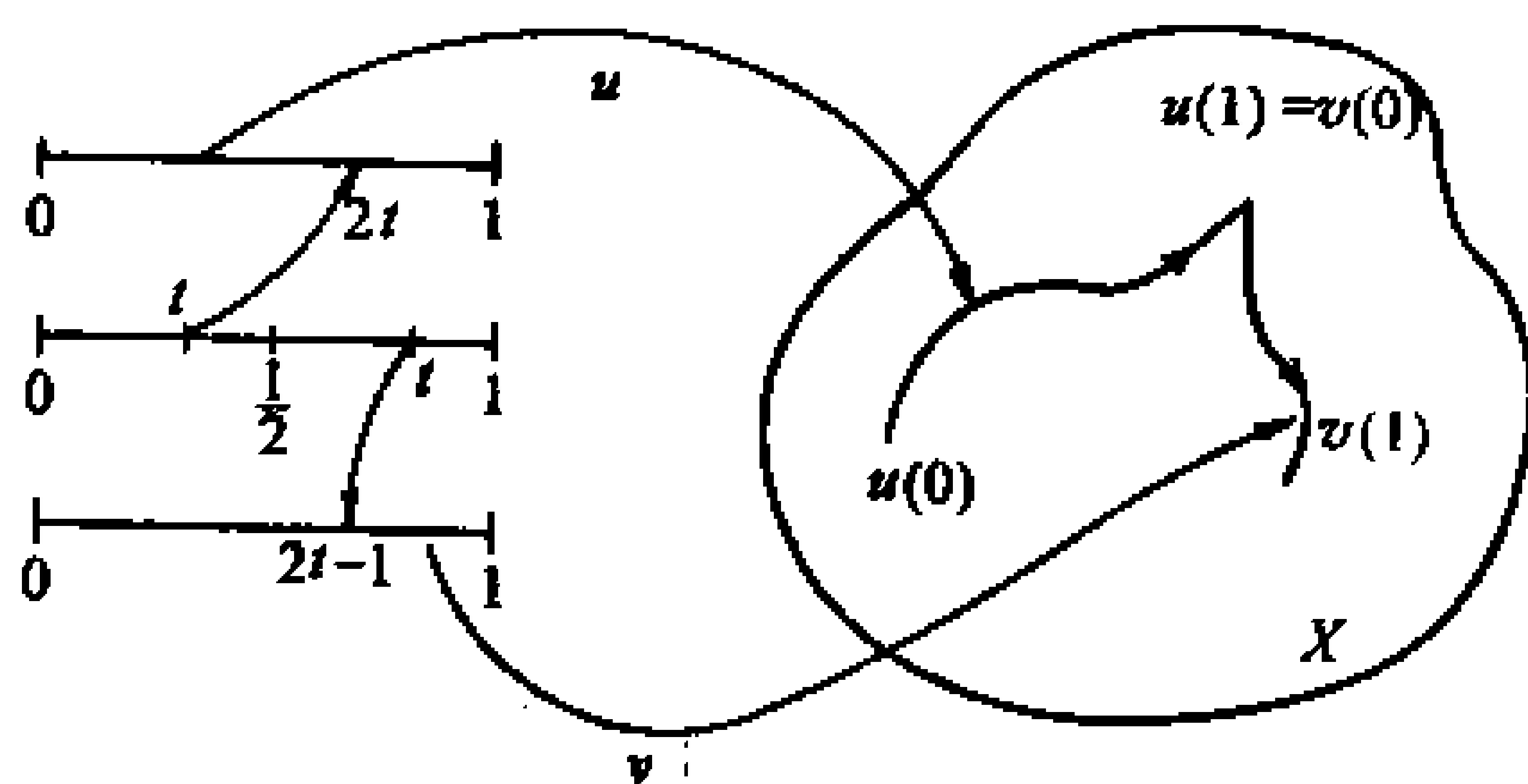
在本章，我们将定义并讨论拓扑空间 X 的第一例代数不变量 -- 基本群 $\pi_1(X)$. 它定义为由 I 到 X 且将端点 0,1 映为固定点的所有映射的同伦类集合. 我们将证明， $\pi_1(X)$ 可以用自然的方式给予群结构, 并且它是同伦等价之下不变的. 如果 X 是可剖分空间，则以单纯逼近定理为基础，不难给出 $\pi_1(X)$ 的计算方法. 作为基本群的应用，我们还将证明覆盖映射的分类问题.

§1 基本群的定义和性质

设 X 为拓扑空间， x_0 是 X 的称之为 基点 的固定点.

定义 1.1 映射 $u: I \to X$ 使 $u(0) = x, u(1) = y$ 称为 X 的由 x 点到 y 点的 道路. 若 $u(0) = u(1) = x_0, u$ 称为 X 的以 x_0 为基点的 闭路.

定义 1.2 已给道路 $u, v: I \to X$ 使 $u(1) = v(0)$, 乘积道路$u * v: I \to X$ 定义为



$$u * v(t) = \begin{cases} u(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ v(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

直观上讲，若 u 的终点和 v 的起点相同，乘积道路 $u*v$ 就是将 u 和 v 连接起来所得的道路．推而广之，有

定义 1.3 已给道路 $u_1, u_2, \ldots, u_n: I \to X$ 使 $u_r(1) = u_{r+1}(0), 1 \leq r \leq n-1$．乘积道路 $u_1 * u_2 * \cdots * u_n: I \to X$ 定义为

$$u_1 * \cdots * u_n(t) = u_r(nt - r + 1), \text{当} \frac{r-1}{n} \leq t \leq \frac{r}{n}, r = 1, \ldots, n.$$

乘积道路和相对于端点 0, 1 的同伦关系有某种协调性．

命题 1.4 已给 X 的道路 $u_1, \ldots, u_n$ 和 $v_1, \ldots, v_n$ 使 $u_r(0) = v_r(0), u_r(1) = v_r(1)(1 \leq r \leq n)$，而且 $u_r(1) = u_{r+1}(0)$，$v_r(1) = v_{r+1}(0), 1 \leq r \leq n-1$．若 $u_r \simeq v_r, \mathrm{rel}\, 0, 1 (1 \leq r \leq n)$，则有 $u_1 * \cdots * u_n \simeq v_1 * \cdots * v_n \quad \mathrm{rel} \quad 0, 1$．

证：由 $u_r \simeq v_r \quad \mathrm{rel} \quad 0, 1$，存在映射 $F_r: I \times I \to X$ 使 $F_r(t, 0) = u_r(t), F_r(t, 1) = v_r(t)$．而且 $F_r(0, s) = u_r(0) = v_r(0), F_r(1, s) = u_r(1) = v_r(1), 0 \leq s, t \leq 1, 1 \leq r \leq n$．作对应 $G: I \times I \to X$ 为 $G(t, s) = F_r(nt - r + 1, s)$ 当 $\frac{r-1}{n} \leq t \leq \frac{r}{n}, r = 1, 2, \ldots, n$ 因此有

$$\begin{aligned}
G(t, 0) &= u_r(nt - r + 1), \text{当} \frac{r-1}{n} \leq t \leq \frac{r}{n}, r = 1, 2, \ldots, n \\
G(t, 1) &= v_r(nt - r + 1), \text{当} \frac{r-1}{n} \leq t \leq \frac{r}{n}, r = 1, 2, \ldots, n \\
G(0, s) &= F_1(0, s) = u_1(0) = v_1(0) \\
G(1, s) &= F_n(1, s) = u_n(1) = v_n(1)
\end{aligned}$$

从而 $u_1 * \cdots * u_n \simeq v_1 * \cdots * v_n \quad \mathrm{rel} \quad 0, 1$．

定义 1.5 X 的道路 u 的逆道路 $u^{-1}: I \to X$ 定义为 $u^{-1}(t) = u(1-t), 0 \leq t \leq 1$．可见 u^{-1} 是以 u 的终点作为起点，以 u 的起点作为终点的道路，经过的路径相同．逆道路和同伦也协调．

命题 1.6 已给道路 $u, v: I \to X$ 使 $u(0) = v(0), u(1) = v(1)$，若 $u \simeq v, \mathrm{rel} \quad 0, 1$，则 $u^{-1} \simeq v^{-1} \quad \mathrm{rel} \quad 0, 1$．

证：由 $u \simeq v \quad \text{rel} \quad 0,1$，存在映射 $F: I \times I \to X$ 使 $F(t,0) = u(t), F(t,1) = v(t), F(0,s) = u(0) = v(0), F(1,s) = u(1) = v(1)$. 令 $G: I \times I \to X$ 为 $G(t,s) = F(1-t,s)$，容易验证 $u^{-1} \overset{G}{\simeq} v^{-1} \quad \text{rel} \quad 0,1$.

命题 1.7 (1) 设 $u_1, \ldots, u_n: I \to X$ 为 n 个道路使 $u_r(1) = u_{r+1}(0)$，则 $(u_1 * \cdots * u_r) * (u_{r+1} * \cdots * u_n) \simeq u_1 * \cdots * u_n \quad \text{rel} \quad 0,1$，即在同伦意义下乘积道路具有可结合性.

(2) 设 u 为 X 的由 x 到 y 的道路，c_x 为常值道路，则 $c_x * u \simeq u \simeq u * c_y \quad \text{rel} \quad 0,1$.

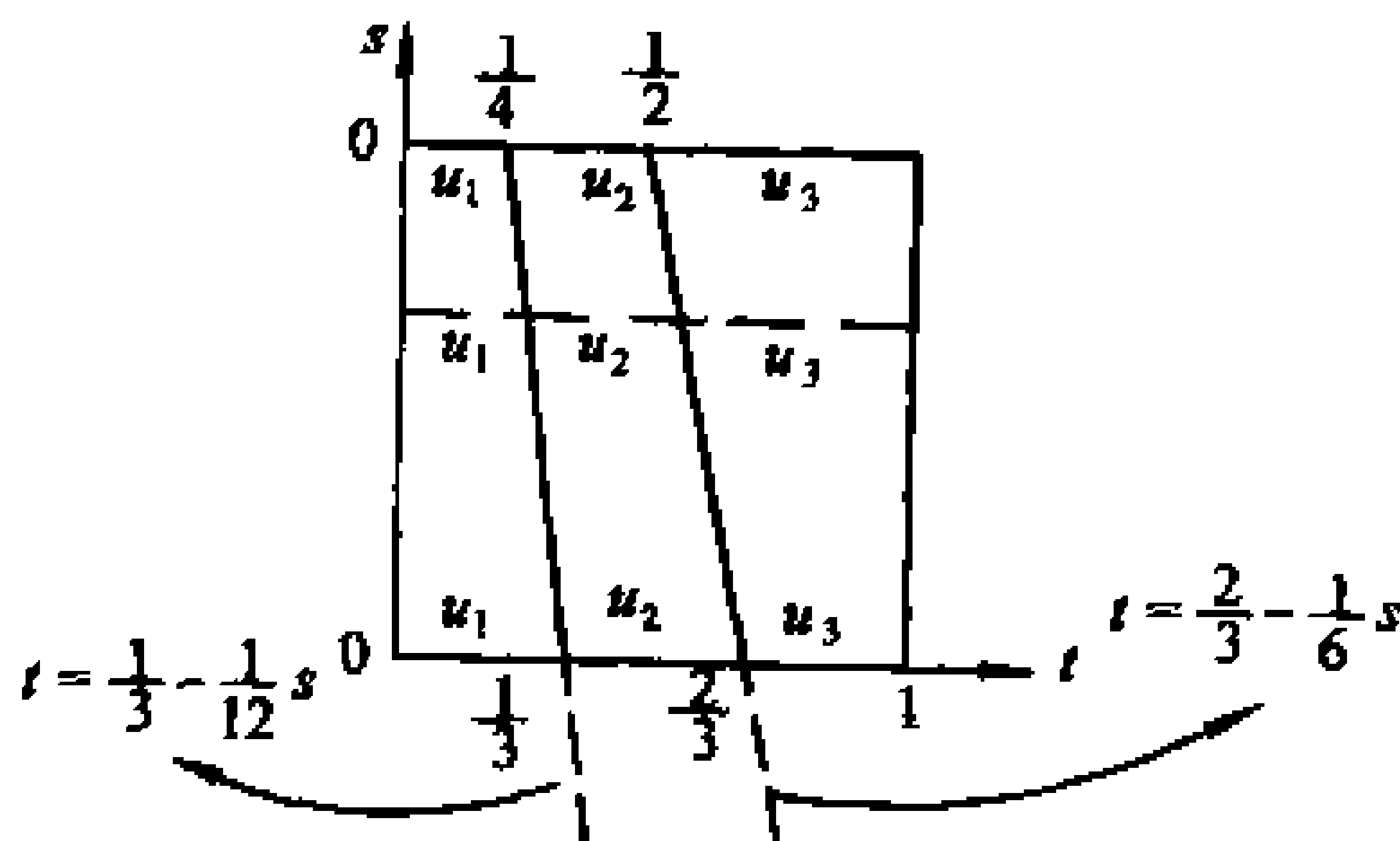
(3) u 同上，则 $u * u^{-1} \simeq c_x \,\text{rel}\, 0,1, u^{-1} * u \simeq c_y, \text{rel}\, 0,1$.

证：(1) 我们只对 $n = 3, r = 2$ 证明，即证明 $(u_1 * u_2) * u_3 \simeq u_1 * u_2 * u_3, \quad \text{rel} \quad 0,1$. 其它情况类似.

首先我们有

$$(u_1 * u_2) * u_3(t) = \begin{cases} u_1(4t) & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ u_2(4t-1) & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ u_3(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$u_1 * u_2 * u_3(t) = \begin{cases} u_1(3t) & 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ u_2(3t-1) & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ u_3(3t-2) & \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$



并且期望它们将定义在正方形 $I \times I$ 的上底和下底上，然后扩

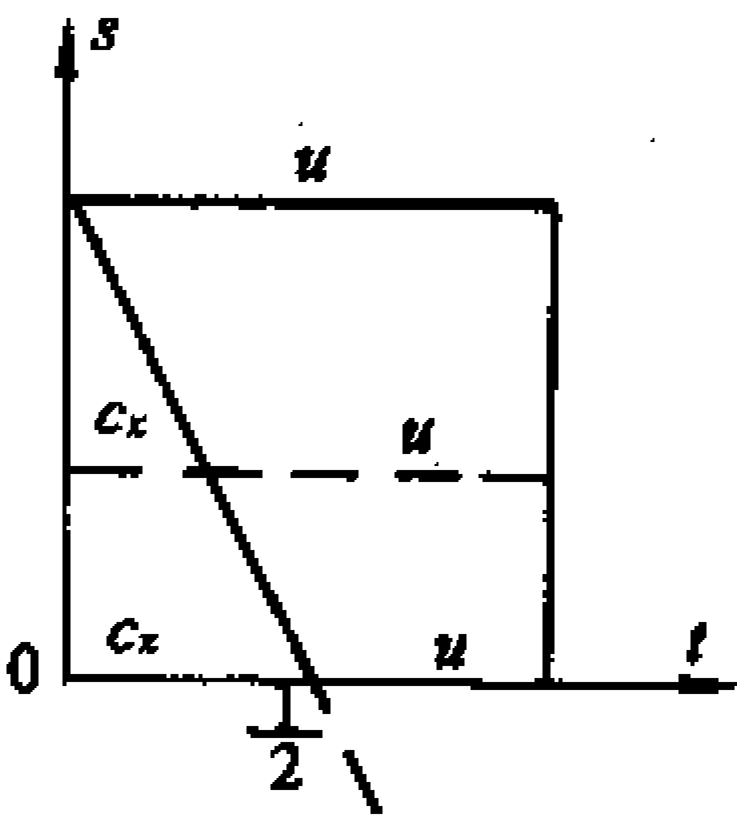
张成同伦 $F:I\times I\to X$, 在 (t,s) 平面上，图中两条斜线的方程分别为 $t=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}s, t=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}s$, 因此 F 可定义为

$$F(t,s)=\begin{cases} u_1\left(\frac{t}{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}s}\right) & 0\le t\le \frac{1}{3}-\frac{1}{12}s \\ u_2\left(\frac{t-(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}s)}{(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}s)-(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}s)}\right) & \frac{1}{3}-\frac{1}{12}s\le t\le \frac{2}{3}-\frac{1}{6}s \\ u_3\left(\frac{t-(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}s)}{1-(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}s)}\right) & \frac{2}{3}-\frac{1}{6}s\le t\le 1 \end{cases}$$

容易验证 $(u_1*u_2)*u_3\overset{F}{\simeq}u_1*u_2*u_3 \quad \text{rel} \quad 0,1.$

(2) 作 $F:I\times I\to X$ 为

$$F(t,s)=\begin{cases} x, & 0\le t\le \frac{1}{2}-\frac{1}{2}s \\ u\left(\frac{t-(1/2-s/2)}{1-(1/2-s/2)}\right), & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\le t\le 1 \end{cases}$$



容易验证 $c_x*u\overset{F}{\simeq}u \quad \text{rel} \quad 0,1$, 同理有 $u\simeq c_y \quad \text{rel} \quad 0,1.$

(3) 作 $F:I\times I\to X$ 为

$$F(t,s)=\begin{cases} u(2ts) & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ u^{-1}(2ts-2s+1) & \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

则 $F(t,0)=u(0)=u^{-1}(1), F(t,1)=u*u^{-1}(t), F(0,s)=u(0)=F(1,s)$. 因此 $u*u^{-1}\overset{F}{\simeq}c_x \quad \text{rel} \quad 0,1$, 同理 $u^{-1}*u\simeq c_y \quad \text{rel} \quad 0,1.$

定义 1.8 令 $\pi_1(X,x_0)$ 为 X 的以 x_0 为基点的闭路相对于 0, 1 的同伦类的集合，即 $\pi_1(X,x_0)=\{[u]\mid$ 道路$u:I\to$

X使$u(0)=u(1)=x_0\}$. 在 $\pi_1(X,x_0)$ 上再定义乘法为 $[u]\cdot[v]=[u*v]$, 由命题 1.3, 这是唯一定义的, 并且由以下定理可知, $\pi_1(X,x_0)$ 构成一个群, 称为 X 的以 x_0 为基点的 **基本群**.

定理 1.9 $\pi_1(X,x_0)$ 是一个群.

证: 由命题 1.7(1), $(u_1*u_2)*u_3\simeq u_1*u_2*u_3\simeq u_1*(u_2*u_3)\quad \mathrm{rel}\quad 0,1$. 因此有 $([u_1]\cdot[u_2])\cdot[u_3]=[u_1]\cdot([u_2]\cdot[u_3])$, 乘法满足结合律. 由命题 1.7(2), $[c_{x_0}]\cdot[u]=[u]=[u]\cdot[c_{x_0}]$, 因此常值道路的同伦类 $[c_{x_0}]$ 是乘法的单位元. 由命题 1.7(3), $[u]\cdot[u^{-1}]=[c_{x_0}]$, 任一元素 $[u]$ 的乘法逆元为 $[u^{-1}]$.

定理 1.10 映射 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 导出同态

$$f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$$

满足 (1) 若 $f':(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 使 $f\simeq f'\quad \mathrm{rel}\quad x_0$, 则 $f_*=f'_*$.

(2) 恒等映射 $1:(X,x_0)\to(X,x_0)$ 导出 $1_*=1_{\pi_1(X,x_0)}$.

(3) 若另有映射 $g:(Y,y_0)\to(Z,z_0)$, 则 $(gf)_*=g_*f_*$.

证: 设 $u:I\to X$ 为道路使 $u(0)=u(1)=x_0$, 即 $[u]\in\pi_1(X,x_0)$. 令 $f_*[u]=[fu]$, 其中 $fu:I\to Y$ 使 $fu(0)=f(u(1))=y_0$, 即 $[fu]\in\pi_1(Y,y_0)$, 若 $u\simeq v\quad \mathrm{rel}\quad 0,1$, 则 $fu\simeq fv\quad \mathrm{rel}\quad 0,1$, 从而 f_* 是唯一确定的. 另外 $f_*[u]\cdot[v]=[f(u*v)]$, 其中

$$f(u*v)(t)=\begin{cases} fu(2t) & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ fv(2t-1) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

从而 $f(u*v)=fu*fv$, $f_*[u][v]=f_*[u]\cdot f_*[v]$, f_* 是群同态. 若 $f\simeq f'\quad \mathrm{rel}\quad x_0$, 则 $fu\simeq f'u\quad \mathrm{rel}\quad 0,1$, 因此 $f_*[u]=f'_*[v]$, 即 $f_*=f'_*$. (2) 和 (3) 的证明是显然的.

推论 1.11 若 $(X,x_0)\simeq(Y,y_0)$, 即存在映射 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$, $g:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ 使 $gf\simeq 1_X\,\mathrm{rel}\,x_0$, $fg\simeq 1_Y\,\mathrm{rel}\,y_0$, 则 f 导出同构 $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$.

命题 1.12 设 X_0 是空间 X 的含 x_0 的道路分支，$i: X_0 \hookrightarrow X$ 为内射，则 i 导出同构 $i_*: \pi_1(X_0, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$.

证：任意 $[u] \in \pi_1(X, x_0)$，则 u 为 I 到 X 的映射使 $u(0) = u(1) = x_0$. 因为 I 道路连通，因此 $u(I) \subset X_0$. 即 $[u] \in \pi_1(X_0, x_0), i_*[u] = [u]$ 是满同态. 设 $i_*[u] = i_*[v]$，则存在映射 $F: I \times I \to X$ 使 $F(t, 0) = u(t), F(t, 1) = v(t)$ 而且 $F(0, s) = F(1, s) = x_0$，同样的，$I \times I$ 道路连通，$F(I \times I) \subset X_0$. 因此在 X_0 中有 $u \overset{F}{\simeq} v \quad \text{rel} \quad 0, 1, [u] = [v], i_*$ 是单同态.

定义 1.13 空间 X 的所有道路分支集合记为 $\pi_0(X)$.

命题 1.14 若 $X \simeq Y$，则集合 $\pi_0(X)$ 和 $\pi_0(Y)$ 之间有一一对应关系.

证：由 $X \simeq Y$，存在映射 $f: X \to Y, g: Y \to X$ 使 $gf \simeq 1_X, fg \simeq 1_Y$. 定义 $f_*: \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ 使 f_* 将含 x 点的道路分支对应于含 $f(x)$ 的 Y 的道路分支. 类似的可定义 $g_*: \pi_0(Y) \to \pi_1(X)$. 这样 $g_* f_*: \pi_0(X) \to \pi_0(X)$ 将含 x 道路分支对应于含 $gf(x)$ 的道路分支. 由 $gf \simeq 1_X$ 可知 x 和 $gf(x)$ 点在同一道路分支中，因此 $g_* f_* = 1_{\pi_0(X)}$. 同理 $f_* g_* = 1_{\pi_0(Y)}$，从而 f_* 是一一对应.

$\pi_0(X)$ 只是一个集合，不可能定义群结构. 一般的，基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 是非交换群. 另外基本群总是与选定的基点 x_0 相联系. 下面讨论把基点 x_0 改变成 x_1 时基本群有什么变化.

定理 1.15 X 的由 x_0 到 x_1 的道路 u 导出一个同构

$$u_\#: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

满足 (1) 若 $u \simeq v \quad \text{rel} \quad 0, 1$，则 $u_\# = v_\#$.

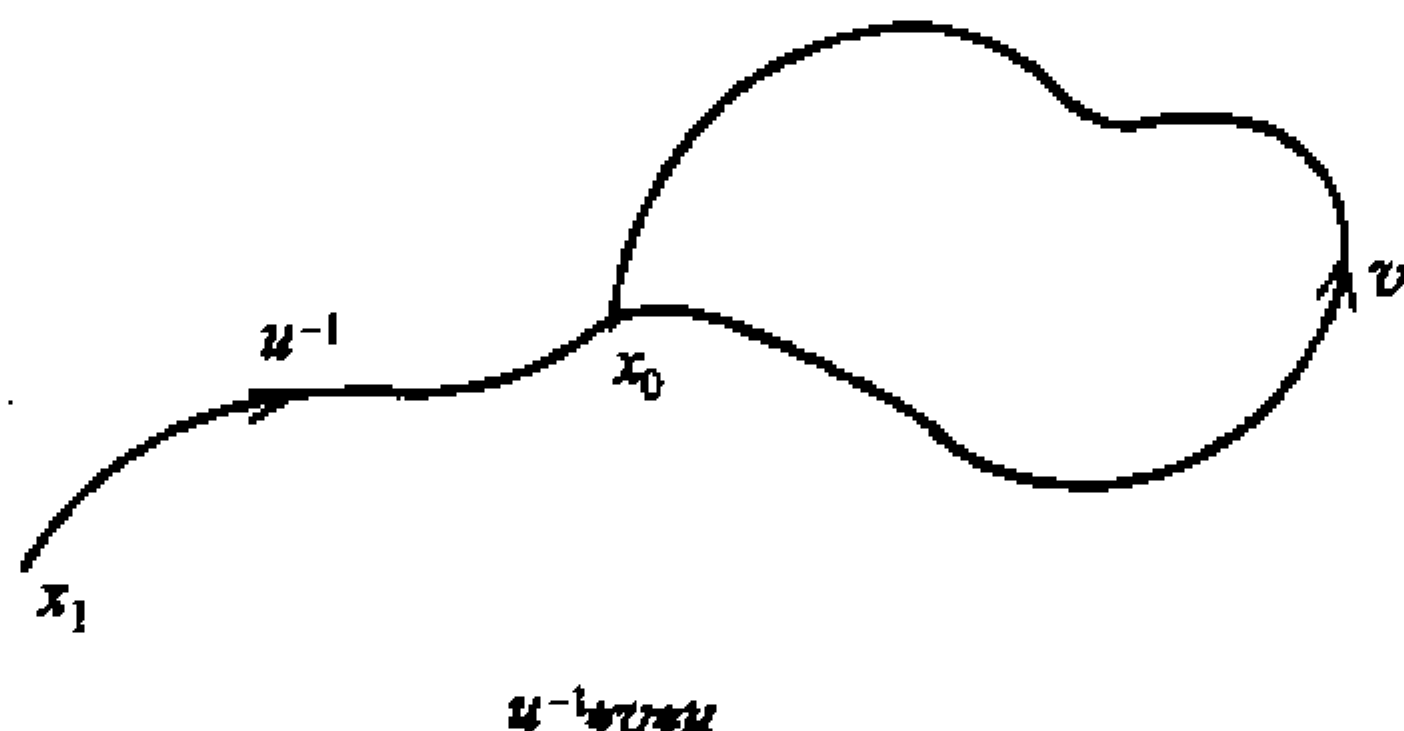
(2) 常值道路 c_{x_0} 导出 $(c_{x_0})_\# = 1_{\pi_1(X, x_0)}$.

(3) 设另有 x_1 到 x_2 的道路 w，则 $(u * w)_\# = w_\# u_\#$.

(4) 对映射 $f: X \to Y$ 使 $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$ 有 $f_* u_\# = (fu)_\# f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1)$.

证：任意 $[v] \in \pi_1(X, x_0)$，v 是以 x_0 为基点的闭路. 如图所

示，$u^{-1}*v*u$ 是以 x_1 为基点的闭路. 令 $u_\#[v]=[u^{-1}*v*u]\in\pi_1(X,x_1)$.



$u^{-1}*v*u$

若 $v\simeq v'\quad\text{rel}\quad 0,1$, 由命题 1.4 可知 $u^{-1}*v*u\simeq u^{-1}*v'*u\quad\text{rel}\quad 0,1$. 因此 $u_\#$ 是唯一定义的. 另外

$$u_\#[v][w]=u_\#[v*w]=[u^{-1}*v*w*u]$$

$$=[u^{-1}*v*u*u^{-1}*w*u]$$

$$=[u^{-1}*v*u]\cdot[u^{-1}*w*u]=u_\#[v]\cdot u_\#[w]$$

因此 $u_\#$ 是同态. 然后容易验证 (1)—(4) 成立, 从而有 $u_\#u_\#^{-1}=(u^{-1}*u)_\#=(c_{x_0})_\#=1$, 同理 $u_\#^{-1}u_\#=1$, 因此 $u_\#$ 是同构.

推论 1.16 若 u 是 X 的以 x_0 为基点的闭路, 则 $u_\#:\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(X,x_0)$ 为内自同构, 即 $u_\#[v]=[u]^{-1}\cdot[v]\cdot[u]$.

推论 1.17 设 x,y 为道路连通空间 X 的任意两点, 则 $\pi_1(X,x)\cong\pi_1(Y,y)$, 即基本群在同构意义下和基点的选取无关. 我们有时将基点省略, 简记为 $\pi_1(X)$.

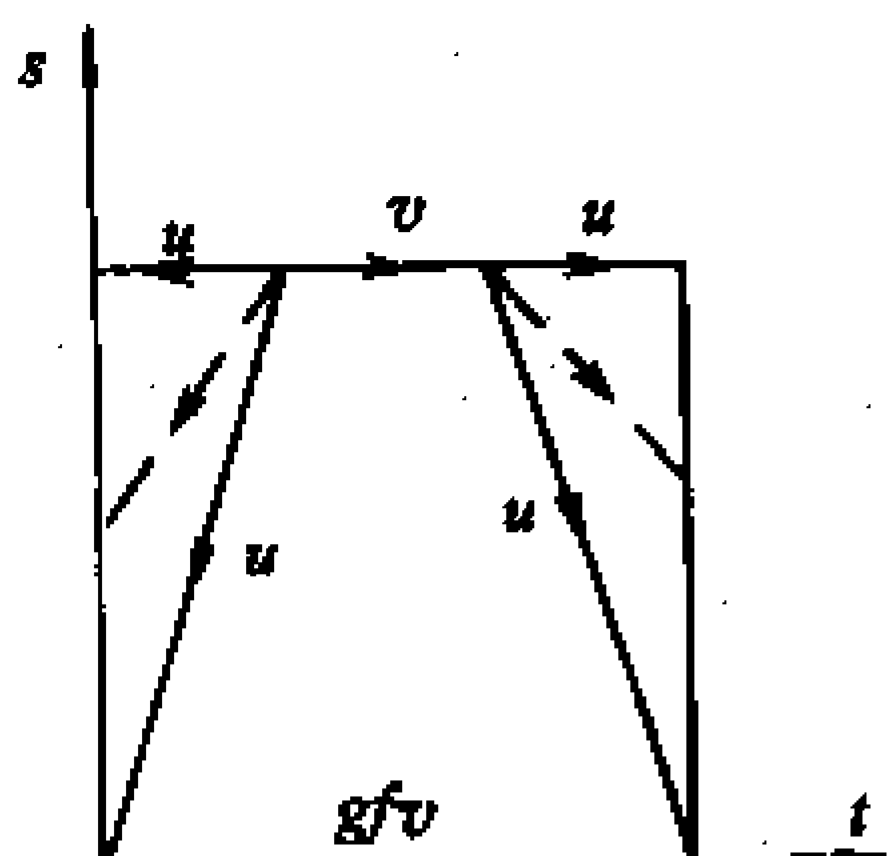
下面证明, 基本群在同伦等价下不变, 即伦型不变性.

定理 1.18 设 $f:X\simeq Y$, 则 $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,f(x_0))$ 为同构.

证: 设 $g:Y\to X$ 为 f 的同伦逆, 即 $gf\simeq 1_X, fg\simeq 1_Y$. 记 $x_1=gf(x_0)$, 我们证明 $g_*f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1)$ 同构. 由 $gf\simeq 1_X$, 存在映射 $F:X\times I\to X$ 使 $F(x,0)=$

$gf(x), F(x,1) = x$(任 $x \in X$). 令 $u(t) = F(x_0, 1-t)$, 则 $u: I \to X$ 为由 x_0 到 x_1 的道路. 只要证 $g_* f_* = u_\#$, 即对任一闭路 v, $gfv \simeq u^{-1} * v * u \quad \text{rel} \quad 0,1$, 作 $G: I \times I \to X$ 为

$$G(t,s) = \begin{cases} u(1-3t) & 0 \le t \le \frac{s}{3} \\ F(v((3t-s)/(3-2s)), s) & \frac{s}{3} \le t \le 1 - \frac{s}{3} \\ u(3t-2) & 1 - \frac{s}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$



因为当 $t = \frac{s}{3}$ 有 $F(v(\frac{3t-s}{3-2s}), s) = F(x_0, s) = u(1-s) = u^{-1}(s)$, 当 $t = 1 - \frac{s}{3}$ 时, 有 $F(v(\frac{3t-s}{3-2s}), s) = F(x_0, s) = u(1-s)$, 由粘结引理 G 连续. 容易验证, $G(t,0) = gfv(t), G(t,1) = u^{-1} * v * u(t)$, 而且 $G(0,s) = G(1,s) = u(1) = x_0$, 从而 $gfv \simeq u^{-1} * v * u \quad \text{rel} \quad 0,1$. 因此 $g_* f_* = u_\#$ 是同构, 同理 $f_* g_*$ 也是同构. 因此 f_* 为同构.

定义 1.19 空间 X 叫做 **单连通的**, 如果 X 道路连通而且 $\pi_1(X) = 0$, 只含有一个元素的平凡群.

显然道路连通空间 X 是单连通的当且仅当每个闭路相对于 0,1 同伦于常值映射, 即零伦. 到下一节中我们将指出, S^1 是非单连通空间的一个例子, 而 $S^n (n > 1)$ 是单连通的.

习　题

1. 直接构造同伦 $F: I \times I \to X$ 证明 $(u_1 * u_2) * u_3 \simeq u_1 *$

$(u_2 * u_3)$ rel $0,1$, 其中 u_1, u_2, u_3 为 X 的道路, $u_1(1) = u_2(0)$ 且 $u_2(1) = u_3(0)$.

2. 设 α 为 X 的道路, $f: I \to I$ 是满的严格递增映射使 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明: $\alpha \simeq \alpha f$ rel $0,1$.

3. 设 $[S^1, p; X, x_0]$ 表示所有映射 $f: (S^1, p) \to (X, x_0)$ 的相对于 p 点的同伦类集合. 试在此集合中引进乘法使之成为一个群, 且这个群与 $\pi_1(X, x_0)$ 同构, 其中 $p = (1,0) \in S^1$.

4. 设 u 是 X 的以 x_0 为基点的闭路, 证明: $u_\# = 1_{\pi_1(X,x_0)}$ 当且仅当 $[u]$ 属于群 $\pi_1(X, x_0)$ 的中心.

5. 试作出空间 X(具有基点 x_0, x_1) 使 $\pi_1(X, x_0)$ 不同构于 $\pi_1(X, x_1)$.

6. 空间 X 称为 1- **单式的**, 如果对每点 $x_0 \in X$ 和每个以 x_0 为基点的闭路 $u, u_\# = 1: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. 试证: 道路连通的 X 是 1- 单式的当且仅当 $\pi_1(X, x_0)$ 是 Abel 群.

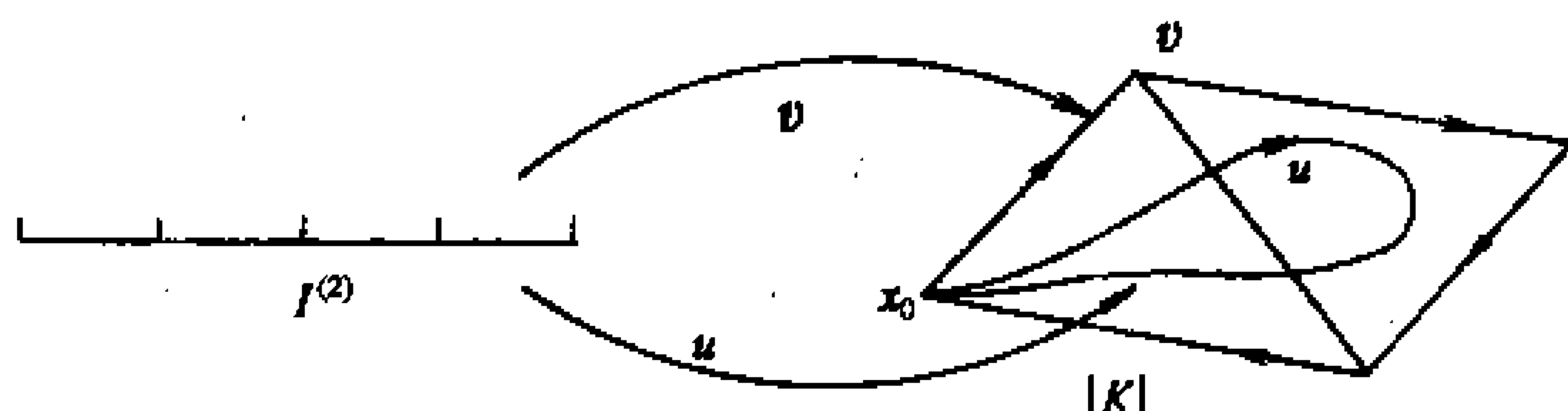
7. 拓扑群 G 是一个拓扑空间又是一个群, 使群的乘法 $m: G \times G \to G$ 和逆元对应 $\alpha: G \to G, \alpha(g) = g^{-1}$ 都是连续映射. 对 G 的以单位元 e 为基点的闭路 v, w, 定义 $v \circ w(t) = m(v(t), w(t))$. 证明: $v * w \simeq v \circ w \simeq w * v$ rel $0,1$, 从而推导出 $\pi_1(G, e)$ 是 Abel 群.

8. 用单纯逼近定理证明: $\pi_1(S^n, x_0) = 0 \quad (n > 1)$, 从而得出 S^n 是单连通的.

§2 计算方法及一些简单运用

我们已经给出基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 的定义和基本性质. 但是, 如果不能计算出某些空间 X 的基本群, 则它在拓扑问题的证明中将无法起作用. 一般的, $\pi_1(X)$ 是较难计算的. 但是如果 X 是多面体, 单纯逼近定理将会把 $\pi_1(X)$ 的计算作出相当的化简.

设 $X=$ 多面体 $|K|$. 任意闭路 $u: I\to|K|$ 存在单纯逼近 $v: I^{(r)}\to|K|$ 使 $u\simeq v\quad \text{rel}\quad 0,1$. 因此 $[u]=[v]\in\pi_1(|K|,x_0)$. 这就是说, $\pi_1(|K|,x_0)$ 中任一同伦类 $[u]$, 总有一个单纯映射 $v: I^{(r)}\to|K|$ 作为它的一个代表. 显而易见, $v(I)$ 是一个闭折线, 或称为闭棱道, 如图所示.



因此我们可以通过找出所有闭棱道的等价类来计算 $\pi_1(|K|,x_0)$. 下面介绍棱道的定义.

定义 2.1 复形 K 的由顶点 a^0 到 a^n 的 棱道 是一序列顶点 $a^0a^1\ldots a^n$ 使 (a^{i-1},a^i) 都展成 K 的 1 维或 0 维单形, $1\leq i\leq n-1$. 若 $a^0=a^n$, 则称为以 a^0 为基点的闭棱道. 特殊情况下, 只有一个顶点 a^0 称为常值棱道.

定义 2.2 棱道 $\alpha=a^0a^1\ldots a^n,\beta=a^na^{n+1}\ldots a^{n+m}$ 的乘积棱道$\alpha\cdot\beta=a^0a^1\ldots a^na^{n+1}\ldots a^{n+m}$. α 的 逆棱道 $\alpha^{-1}=a^na^{n-1}\ldots a^0$.

显然, 棱道的乘积是可结合的, $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$, 而且有 $(\alpha\beta)^{-1}=\beta^{-1}\cdot\alpha^{-1}$. 相应于道路之间相对于 0,1 的同伦, 我们将定义棱道之间的等价. 首先定义容许变换如下:

定义 2.3 以下棱道的变换称为棱道的 容许变换

(1) 当 $a^{r-1}=a^r$, 棱道 $\ldots a^{r-1}a^r\ldots$ 变成 $\ldots a^r\ldots$, 或反之.

(2) 当 a^{r-1},a^r,a^{r+1} 展成 K 的单形, 棱道 $\ldots a^{r-1}a^ra^{r+1}\ldots$ 变成 $\ldots a^{r-1}a^{r+1}\ldots$, 或反之.

第一个容许变换是棱道中重复顶点可去掉一个或反之. 第二个容许变换在 (a^{r-1},a^r,a^{r+1}) 为单形的情况下将棱道经过

折线 (a^{r-1},a^r) 和 (a^r,a^{r+1}) 改为只经过线段 (a^{r-1},a^{r+1}), 或反之.



定义 2.4 若棱道 α 经过有限次容许变换变成 β, 称棱道 α 等价于 β, 记作 $\alpha\sim\beta$. 显然这是一个等价关系.

和道路乘积与相对于 0,1 的同伦有协调性一样, 棱道乘积和逆与棱道的等价也有协调性, 证明是显然的.

命题 2.5 设 α_0,β_0 是由 a^0 到 a^n 的棱道, α_1,β_1 是由 a^n 到 a^{n+m} 的棱道, 且 $\alpha_0\sim\beta_0,\alpha_1\sim\beta_1$, 则

(1) $\alpha_0\cdot\alpha_1\sim\beta_0\cdot\beta_1$.

(2) $\alpha_0^{-1}\sim\beta_0^{-1}$.

(3) $a^0\cdot\alpha_0\sim\alpha_0\sim\alpha_0\cdot a^n$.

(4) $\alpha_0\cdot\alpha_0^{-1}\sim a^0,\quad \alpha_0^{-1}\cdot\alpha_0\sim a^0$.

定义 2.6 设 $\pi(K,a^0)$ 为所有以 a^0 为基点的闭棱道等价类的集合, 在此集合中定义乘法为 $[\alpha]\cdot[\beta]=[\alpha\cdot\beta]$. 由命题 2.5, 这是唯一定义的而且容易验证 $\pi(K,a^0)$ 构成一个群, 叫做复形 K 的以 a^0 为基点的 **棱道群**.

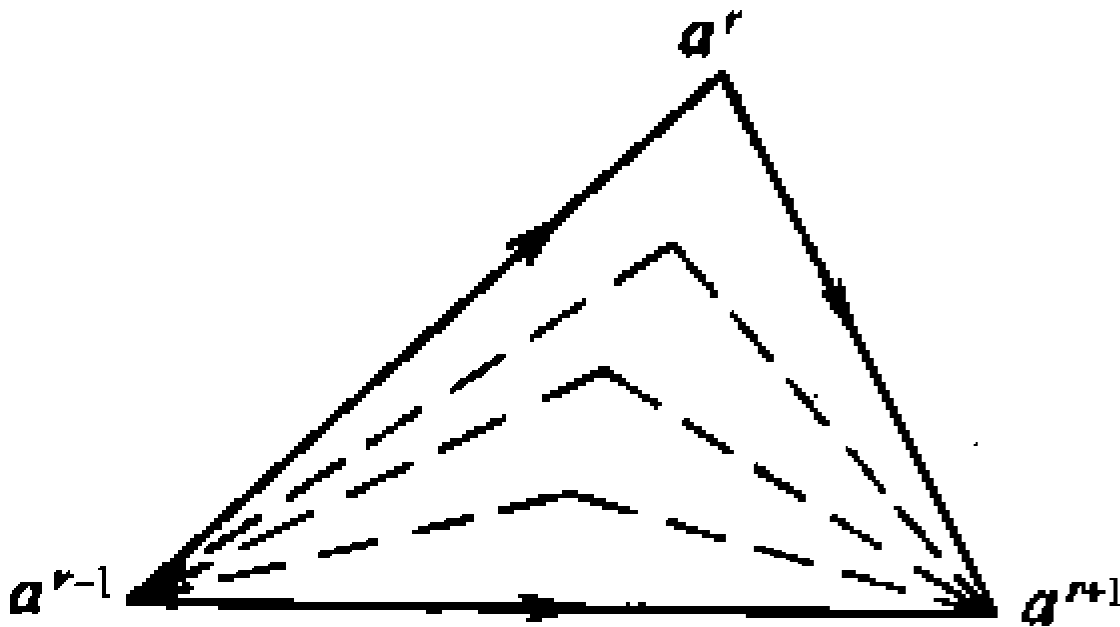
定理 2.7 $\pi(K,a^0)\cong\pi_1(|K|,a^0)$.

证: 作对应 $\theta:\pi(K,a^0)\to\pi_1(|K|,a^0)$ 如下. 对任意闭棱道 $\alpha=a^0a^1\cdots a^na^0$, 则 (a^{i-1},a^i) 为 K 的 1 维或 0 维的单形. 我们作单纯映射 $u_{i-1,i}:|L|=I\to|K|$ 使 $u_{i-1,i}(0)=a^{i-1},u_{i-1,i}(1)=a^i$. 令 $\theta[\alpha]=[u_{0,1}*u_{1,2}*\cdots*u_{n,0}]\in\pi_1(|K|,a^0)$, 下面证明 θ 是唯一定义的, 即只要证 $\alpha\sim\beta$ 蕴含 $\theta[\alpha]=\theta[\beta]$. 不妨设 α 经一次容许变换变成 β.

情况 (1) : $\alpha=\cdots a^ra^r\cdots,\beta=\cdots a^r\cdots$. 这时, $\theta[\alpha]=[\cdots u_{r,r}\cdots]$, 而 $\theta[\beta]=[\cdots,\cdots]$. 由于 $u_{r,r}$ 是在 a^r 的常值道

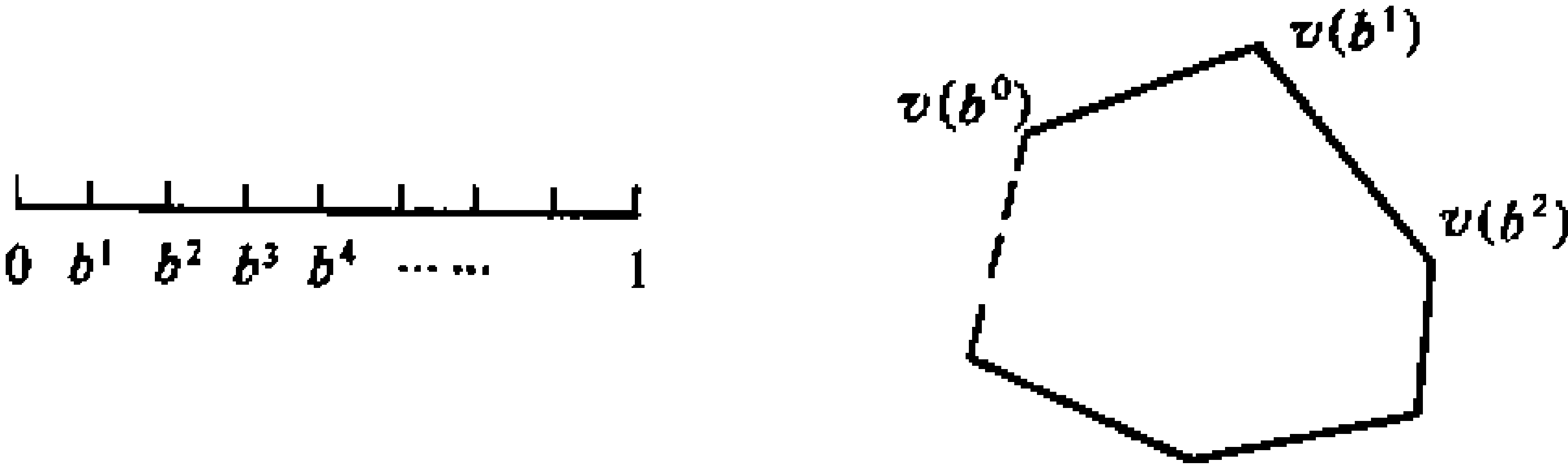
路，它在道路乘积的同伦类中不起作用，故 $\theta[\alpha]=\theta[\beta]$.

情况 (2), $\alpha=\cdots a^{r-1}a^r a^{r+1}\cdots$, $\beta=\cdots a^{r-1}a^{r+1}\cdots$, 其中 (a^{r-1},a^r,a^{r+1}) 是 K 的单形. 这时 $\theta[\alpha]=[\cdots u_{r-1,r}*u_{r,r+1}\cdots]$, $\theta[\beta]=[\cdots u_{r-1,r+1}\cdots]$, $u_{r-1,r}*u_{r,r+1}$ 是路径为折线 (a^{r-1},a^r) 和 (a^r,a^{r+1}) 的道路， $u_{r-1,r+1}$ 是路径为线段 (a^{r-1},a^{r+1}) 的道路. 因为 (a^{r-1},a^r,a^{r+1}) 是 K 的单形，容易说明 $u_{r-1,r}*u_{r,r+1}\simeq u_{r-1,r+1}\quad \mathrm{rel}\quad 0,1$(如图).



因此 $\theta[\alpha]=\theta[\beta]$, 证明了 θ 唯一定义.

再证明 θ 是满同态. θ 是同态是明显的. 任意 $[u]\in\pi_1(|K|,a^0)$, 则 $u:|L|=I\to|K|$ 为道路使 $u(0)=u(1)=a^0$. u 存在单纯逼近 $v:|L^{(r)}|\to|K|$ 使 $u\simeq v\quad \mathrm{rel}\quad 0,1$, 其中 $L^{(r)}$ 有顶点 $0=b^0<b^1<\cdots<b^{2^r}=1$, 而 $v(b^0)v(b^1)\cdots v(b^{2^r})$ 是闭棱道.

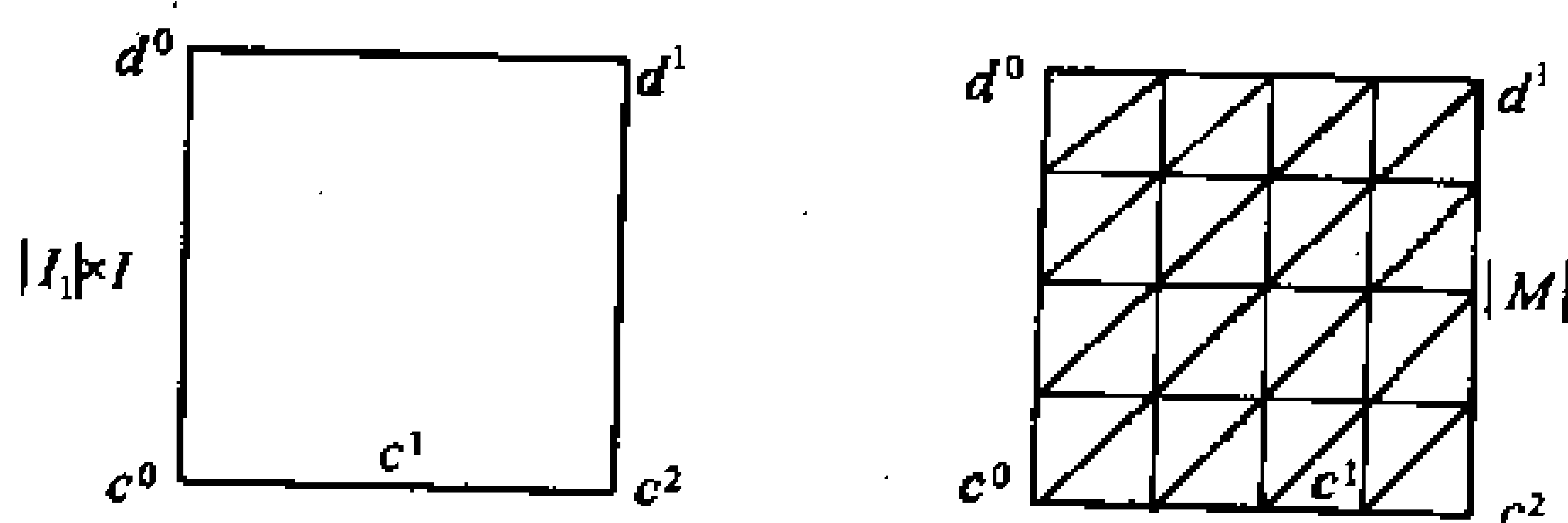


令 $\alpha=v(b^0)v(b^1)\cdots v(b^{2^r})$, 由 θ 的定义可知 $\theta[\alpha]=[v]=[u]$. 从而 θ 是满的.

最后证明 θ 是单的. 设 $\alpha=a^0a^1\cdots a^na^0$ 为棱道使 $\theta[\alpha]=0\in\pi_1(|K|,a^0)$. 根据 θ 的定义， $\theta[\alpha]=[u]$, 其中 $u=$

$u_{0,1} * u_{1,2} * \cdots * u_{n,0}$ 是单纯映射. 因此 u 零伦, 存在映射 $F: I \times I \to |K|$ 使 $F(t,0) = u(t), F(t,1) = F(0,s) = F(1,s) = a^0 (0 \le t, s \le 1)$. 下面证明 $\alpha \sim a^0$.

设 I_n 表示 I 的剖分, 使具有顶点 $0 = c^0 < c^1 < \cdots < c^{n+1} = 1 \quad (c^i = \frac{i}{n+1})$. 因此 u 是从 $I = |I_n|$ 到 $|K|$ 的单纯映射. 令 M 为 $I \times I$ 的剖分 (如下图所示)



并且使每个单形充分小, 而且 M 在 $I \times 0$ 上的剖分是 I_n 的重分, 这样在 c^i 和 c^{i+1} 之间又增加了顶点, 同样在 c^0 和 d^0 之间, c^2 和 d^1 之间, d^0 和 d^1 之间也增加了顶点. 设 c^i 和 c^{i+1} 之间增加的顶点为 b, 则当 M 的单形充分小, 可有 $F(\mathrm{st}_M b) \subset \mathrm{st}_K F(c^i)$ 或 $\mathrm{st} F(c^{i+1})$. 因此利用星形条件, 可以得出 F 的单纯逼近 $G: |M| \to |K|$, 使在正方形 $I \times I$ 的四个边上有 $G(b) = F(c^i)$ 或 $F(c^{i+1})$ 等.

容易看出, 在 M 中, 棱道 $c^0 \ldots c^1 \ldots c^2 \ldots c^n \ldots c^{n+1} \sim c^0 \ldots d^0 \ldots d^1 \ldots c^{n+1}$ 而且经过单纯映射 G 之后会保持等价, 从而在 K 中有棱道 $\omega = G(c^0) \ldots G(c^1) \ldots G(c^n) \ldots G(c^{n+1}) \sim G(c^0) \ldots G(d^0) \ldots G(d^1) \ldots G(c^{n+1})$. 但是 $G(c^i) = F(c^i) = a^i$. 并且特别的 $G(c^0) = G(d^0) = G(d^1) = G(c^{n+1}) = a^0$. 因此

$$\omega = a^0 \ldots a^1 \ldots a^n \ldots a^0 \sim a^0 \ldots a^0 \ldots a^0 \sim a^0$$

注意到 $G(c^i)$ 和 $G(c^{i+1})$ 之间的 $G(b)$ 必然等于 $F(c^i)$ 或 $F(c^{i+1})$. 因此 $\omega \sim a^0 a^1 \cdots a^n = \alpha$, 从而 $\alpha \sim a^0$, θ 是单同态.

定理 2.7 告诉我们, 多面体 $|K|$ 的基本群可用棱道群

$\pi(K,a^0)$ 来计算. 为了给出 $\pi(K,a^0)$ 的表达式, 下面先介绍非交换群用生成元组和关系组来表示的一般形式. 对于已经熟悉群论知识的读者, 下面一段可以省略不读.

集合 A 中的 **字** ω 是形式表达式

$$\omega = a_1^{\epsilon_1}a_2^{\epsilon_2}\cdots a_n^{\epsilon_n}, \quad a_i \in A, \epsilon_i = \pm 1, n \geq 0$$

其中 a_i^1 简记为 a_i. 当 $n=0,\omega$ 为空字, 记为 $\omega=1$.

以下字之间的变换

$$a_1^{\epsilon_1}\dots a_n^{\epsilon_n} \rightleftharpoons a_1^{\epsilon_1}\dots a_r^{\epsilon_r} a a^{-1} a_{r+1}^{\epsilon_{r+1}}\dots a_n^{\epsilon_n}$$

$$\text{或}\quad a_1^{\epsilon_1}\dots a_n^{\epsilon_n} \rightleftharpoons a_1^{\epsilon_1}\dots a_r^{\epsilon_r} a^{-1} a a_{r+1}^{\epsilon_{r+1}}\dots a_n^{\epsilon_n}$$

称为 **基本变换**. 若字 ω_1 经过有限次基本变换变成 ω_2, 称 ω_1 等价于 ω_2. 记为 $\omega_1 \sim \omega_2$. 字 ω 的等价类记为 $[\omega]$.

设集合 $G_p\{A\} = \{[\omega] \mid \omega \text{ 为 } A \text{ 中的字 }\}$, 在此集合上定义乘法: $[a_1^{\epsilon_1}\dots a_n^{\epsilon_n}]\cdot[a_{n+1}^{\epsilon_{n+1}}\dots a_m^{\epsilon_m}] = [a_1^{\epsilon_1}\dots a_n^{\epsilon_n}a_{n+1}^{\epsilon_{n+1}}\dots a_m^{\epsilon_m}]$, 则 $G_p\{A\}$ 构成一个群 (空字 $\omega=1$ 为单位元, $[a_1^{\epsilon_1}\dots a_n^{\epsilon_n}]$ 的逆元为 $[a_n^{-\epsilon_n}\dots a_1^{-\epsilon_1}]$), 叫做由 A 生成的 **自由群**, A 叫做 **生成元组**. A 的基数叫做 $G_p\{A\}$ 的 **秩**, 特别当 A 只有 r 个元素时, $G_p\{A\}$ 的秩为 r.

实际上, 自由群 $G_p\{A\}$ 的元素可不必加上方括号. 但需要记住, 出现相邻的 $a\cdot a^{-1}$ 或 $a^{-1}\cdot a$ 就可以去掉, 或反之. 例如 $a_1a_2a_2a_3^{-1}a_3a_2^{-1}a_4a_5 = a_1a_2a_4a_5$ 等. 另外 $a\cdot a\cdot a = a^3, a^{-1}a^{-1}$ 记作 a^{-2} 等等.

最简单的自由群是一个元素 a 生成的自由群 $G_p\{a\}$, 显然它同构于整数加群 Z, 是 Abel 群, 但是 $G_p\{a,b\}$ 不是 Abel 群, 因为 $ab\neq ba$, 这个群中有形如 $a^nb^ma^sb^t\dots a^ub^v$ 等元素.

设 B 是 $G_p\{A\}$ 的子集, $\overline{B}$ 是含 B 的最小正规子群, 记商群 $G_p\{A\}/\overline{B}$ 为 $G_p\{A;B\}$, 称为具有生成元组 A 和关系组 B 的群. 当 A 有限, 称为 **有限生成群**. 任何一个群都可同构

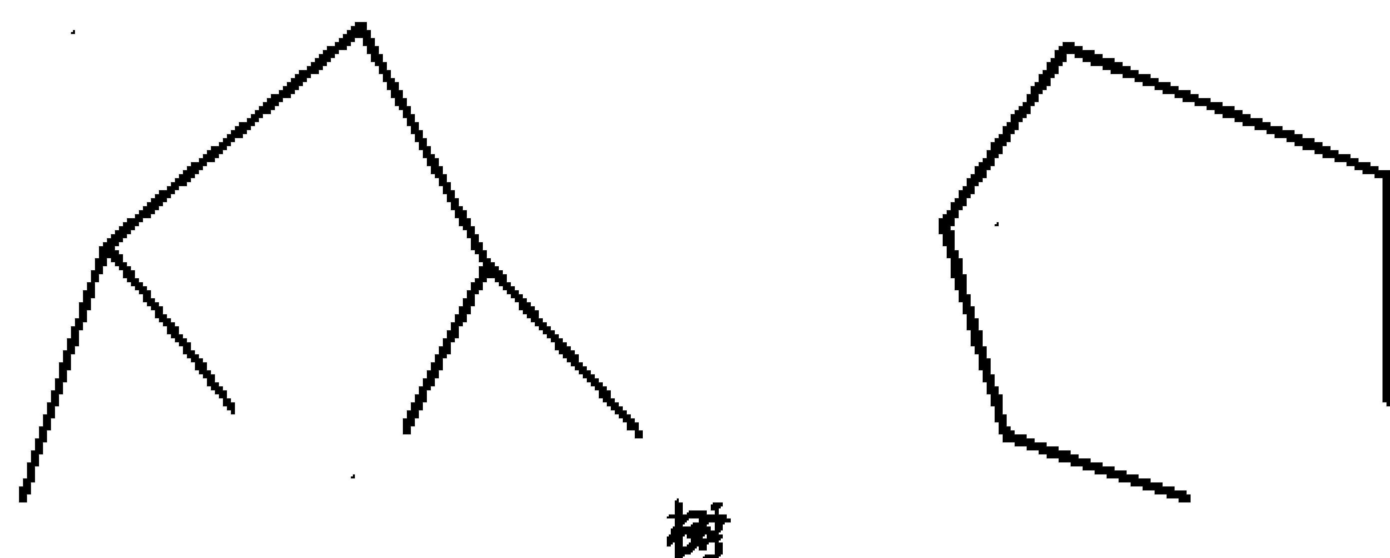
于某个 $G_p\{A;B\}$, 但是生成元组 A 和关系组 B 的取法不唯一. 例如 $G_p\{a,b;a^2,b^3\}$ 是以 a,b 为生成元, 具有关系 $a^2=1$ 和 $b^3=1$ 的群. 显然 $G_p\{a;a^n\}\cong Z_n, \mathrm{mod}\quad n$ 整数加群.

群 G,H 的 **自由乘积**$G*H$ 是以 G 生成元组和 H 生成元组的并集为生成元组, 以 G 关系组和 H 关系组的并集为关系组的群. 例如 $G_p\{a_1,\ldots,a_m;\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}*G_p\{b_1,\ldots,b_p;\beta_1,\ldots,\beta_q\}=G_p\{a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_p;\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_q\}$.

现在我们可以给出复形 K 的棱道群 $\pi(K,a^0)$ 的表达式.

定义 2.8 复形 K 的 1 维子复形 L 叫做 **树**, 如果 $|L|$ 是可缩的.

可见, 如果 L 是树, 则 $|L|$ 可缩, 从而 $\pi(L,a^0)=0$, L 没有闭棱道. L 的图形呈现出好象是树枝一样, 如图所示.



树

复形 K 的树 L 叫做 **最大树**, 如果不存在树 L' 使 $L\subset L'$, 下面的命题是容易证明的.

命题 2.9 若 $|K|$ 道路连通, L 是 K 的最大树, 则 L 含有 K 的所有顶点. 另外 K 的最大树是存在的.

定义 2.10 设 $|K|$ 道路连通. 将 K 的所有顶点排序 $a^0<a^1<\ldots<a^m$. K 的每个单形写成 $(a^{i_0},a^{i_1},\ldots,a^{i_r})$, 其中 $a^{i_0}<\cdots<a^{i_r}$, 称为 **有序单形**. 对 K 的每个一维有序单形 (a^i,a^j), 作出形式符号 g_{ij}. 设 $|L|$ 是含有 K 的所有顶点的可缩子多面体 (它是存在的, 最大树 $|L|$ 是其中一个). 定义 G 为一个群, 它的生成元组和关系组为

生成元组: $\quad\{g_{ij}\mid(a^i,a^j)\text{是}K\backslash L\text{的一维有序单形}\}$

关系组：　$\{g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1} \mid (a^i,a^j,a^k)\text{是}K\backslash L\text{的二维有序单形}\}$

另外，关系组中还作如下补充：　$\{g_{ij}=1 \mid \text{当}(a^i,a^j)\in L\}$

下面的定理说明上述群 G 是棱道群 $\pi(K,a^0)$ 的表达式.

定理 2.11　$G\cong\pi(K,a^0)$.

证：作对应 $\theta\colon G\to\pi(K,a^0)$ 如下．对 K 的每个顶点 a^r，事先选定一个由 a^0 到 a^r 的在 L 中的棱道 α_r，然后令

$$\theta(g_{ij})=[\alpha_i\cdot a^ia^j\cdot\alpha_j^{-1}]\in\pi(K,a^0)$$

再按同态扩展.

对 K 的每个 2 维有序单形 (a^i,a^j,a^k)，我们有

$$\begin{aligned}\theta(g_{ij})\theta(g_{jk})\theta(g_{ik})^{-1} &= [\alpha_ia^ia^j\alpha_j^{-1}][\alpha_ja^ja^k\alpha_k^{-1}][\alpha_ka^ka^i\alpha_i^{-1}]\\ &= [\alpha_ia^ia^ja^ja^ka^ka^i\alpha_i^{-1}]\\ &\quad(\text{因为}\alpha_j^{-1}\alpha_j\sim1\sim\alpha_k^{-1}\alpha_k)\\ &= [\alpha_ia^ia^ja^ka^i\alpha_i^{-1}]\,(\text{因为}a^ja^j\sim a^j)\\ &= [\alpha_ia^ia^ka^i\alpha_i^{-1}]\,(\text{因为}a^ia^ja^k\sim a^ia^k)\\ &= [\alpha_i\alpha_i^{-1}]=1\end{aligned}$$

因此 $\theta(g_{ij}\cdot g_{jk}\cdot g_{ik}^{-1})=1$，$\theta$ 是唯一定义的而且是同态．再作同态 $\phi\colon\pi(K,a^0)\to G$ 使 $\phi[a^0a^ia^j\cdots a^ka^0]=h_{0i}h_{ij}\cdots h_{k0}\in G$，其中

$$h_{ij}=\begin{cases}g_{ij} & \text{当}(a^i,a^j)\text{是}K\backslash L\text{有序 1 维单形}\\ g_{ji}^{-1} & \text{当}(a^j,a^i)\text{是}K\backslash L\text{有序 1 维单形}\\ 1 & \text{其他}\end{cases}$$

容易说明 $\phi\theta(g_{ij})=\phi[\alpha_ia^ia^j\alpha_j^{-1}]=g_{ij}$（因为 α_i 是 L 中棱道)，因此 $\phi\theta=1$．另一方面，若 $\alpha=a^0a^ia^j\cdots a^ka^0$，

$$\theta\phi[\alpha]=\theta\phi[\alpha_0a^0a^i\alpha_i^{-1}]\cdots[\alpha_ka^ka^0\alpha_0^{-1}]$$

$$= \theta\phi[\alpha_0 a^0 a^i \alpha_i^{-1}] \cdots \theta\phi[\alpha_k a^k a^0 \alpha_0^{-1}]$$

但是，$[\alpha_r a^r a^s \alpha_s^{-1}] = 1$ 除非 (a^r, a^s) 是 $K - L$ 的单形，因此任何情况下都有 $\theta\phi[\alpha_r a^r a^s \alpha_s^{-1}] = [\alpha_r a^r a^s \alpha_s^{-1}]$，即 $\theta\phi = 1$. 因此 θ 为同构.

根据定理 2.11 和定义 2.10，$\pi(K, a^0)$ 的表达式只和复形 K 的 1 维和 2 维单形有关，与 3 维及更高维的单形无关. 因此有

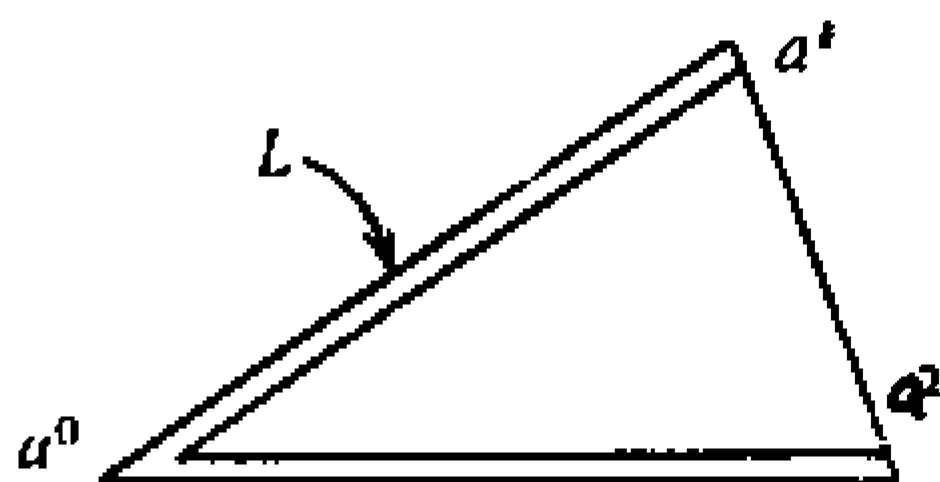
推论 2.12 (1) 多面体的基本群是有限生成群.

(2) 一维多面体的基本群是自由群.

(3) $\pi_1(|K|, a^0)$ 只依赖于 2 维架 $|K^2|$，即当 $m \geq 2$，内射 $i: |K^m| \hookrightarrow |K|$ 导出同构 $i_*: \pi_1(|K^m|, a^0) \cong \pi_1(|K|, a^0)$.

利用棱道群的表达式，下面给出一些简单空间的基本群的计算结果.

例 2.13 $\pi_1(S^1) \cong$ 整数加群 Z.

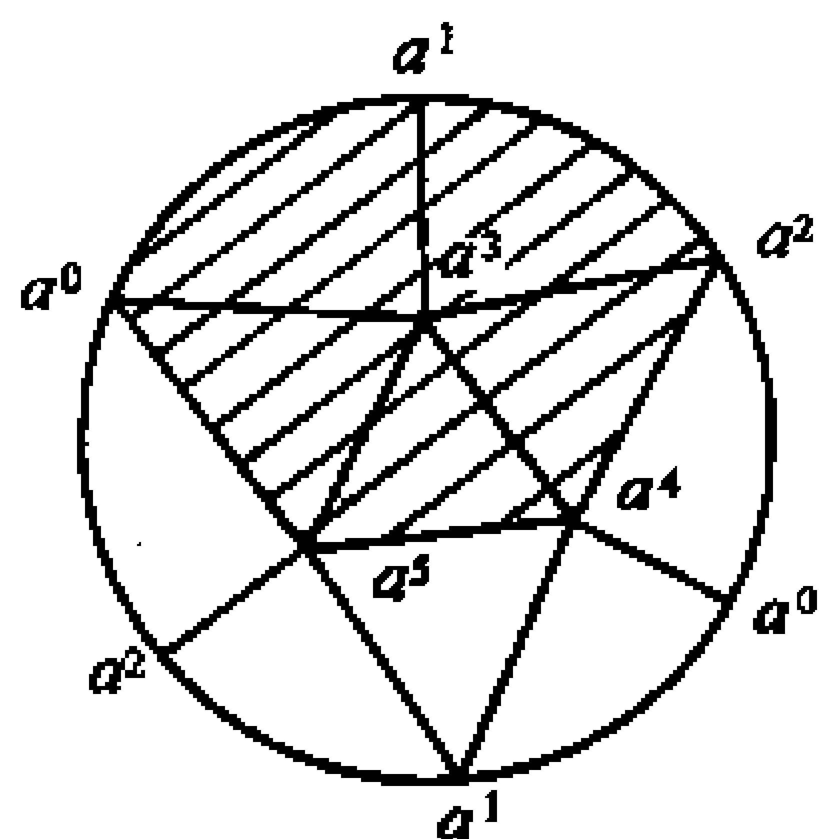


设 $\sigma = (a^0, a^1, a^2)$ 是 2 维单形. 根据第二章 §1 中例 1.15(1)，边界复形 $\dot{\sigma}$ 是 S^1 的剖分. 因此 $\pi_1(S^1) \cong \pi(\dot{\sigma}, a^0)$. 取 L 为边界复形 $\dot{\sigma}$ 的最大树 $L = \{(a^0a^1), (a^0a^2), (a^0), (a^1), (a^2)\}$，则 $\pi_1(S^1) \cong \pi(\dot{\sigma}, a^0) \cong G_p\{g_{12}\}$. 这是单个元素 g_{12} 生成的自由群，从而是整数加群 Z.

例 2.14 $\pi_1(\overbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}^{k\text{ 个}}) \cong G_p\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$，秩为 k 的自由群. 计算方法是类似的.

例 2.15 $\pi_1(RP^2) \cong Z_2$ 计算如下，设 K 为 RP^2 的剖分

如图，$|L|$ 是可缩子多面体如图中阴影所示.



因此 $\pi_1(RP^2) \cong G_p\{A;B\}$, 其中

$$\begin{aligned} A &= \{g_{02}, g_{04}, g_{14}, g_{15}, g_{25}\} \\ B &= \{g_{02}g_{25}g_{05}^{-1}, g_{12}g_{25}g_{15}^{-1}, g_{14}g_{45}g_{15}^{-1}, g_{01}g_{14}g_{04}^{-1}, g_{02}g_{24}g_{04}^{-1}\} \end{aligned}$$

但是 g_{45} 对应的单形 $(a^4, a^5) \in L$, 因此 $g_{45} = 1$, 从而由 $g_{14}g_{45}g_{15}^{-1} = 1$ 得出 $g_{14} = g_{15}$. 同样由 $g_{02}g_{24}g_{04}^{-1} = 1$ 得出 $g_{02} = g_{04}$, 由 $g_{01}g_{14}g_{04} = 1$ 得出 $g_{04} = g_{14}$. 由 $g_{12}g_{25}g_{15}^{-1} = 1$ 得出 $g_{15} = g_{25}$. 因此 $g_{02} = g_{04} = g_{14} = g_{15} = g_{25}$, 最后由 $g_{02}g_{25}g_{05}^{-1} = 1$ 得出 $g_{02}^2 = g_{02}g_{25} = 1$. 因此 $\pi_1(RP^2) \cong G_p\{A;B\} = G_p\{g_{02}; g_{02}^2\} \cong Z_2$.

例 2.16 $\pi_1(S^n) = 0 (n > 1)$, 从而当 $n > 1, S^n$ 单连通. 设 σ 是 $n+1$ 维单形，则边界复形 $\dot{\sigma}$ 是 S^n 的剖分. 另外 $\dot{\sigma}$ 是闭包复形 $K(\sigma)$ 的 n 维架 $K(\sigma)^n$, 根据推论 2.12(3), 内射 $i: |\dot{\sigma}| = |K(\sigma)^n| \hookrightarrow |K(\sigma)| = \sigma$ 导出同构

$$i_*: \pi_1(|\dot{\sigma}|) \cong \pi_1(|K(\sigma)|)$$

但是 $|K(\sigma)|$ 可缩， $\pi_1(|K(\sigma)|) = 0$, 从而 $\pi_1(S^n) = 0$.

在例 2.13 中，$\pi_1(S^1) \cong Z$ 的生成元是闭棱道 $a^0a^1a^2a^0$, 或者以 a^0 为基点沿着 S^1 转一圈的道路. 例 2.15 中，$\pi_1(RP^2) \cong Z_2$ 的生成元是棱道 $a^1a^0a^2a^1$, 从图上看出此生成元的 2 倍 $a^1a^0a^2a^1a^0a^2a^1$ 在 RP^2 中是零伦的，即模 2 为零.

从例 2.15 的计算可以看出，如果 $|K|$ 的单形比较多，则基本群的这种算法是比较复杂的. 因此我们常常要把所要算的多面体分解成较简单的一些多面体.

下面讨论怎样从基本群为已知的 $|K|, |L|$ 来计算出更复杂一些的空间的基本群，例如 $|K|\times|L|, |K|\cup|L|$, 但是 $|K|\cap|L|=|M|$ 等空间的基本群.

定理 2.17 $\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\cong\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$.

证：设 $p: X\times Y\to Z, q: X\times Y\to Y$ 为自然投射，由定理 1.10, p,q 导出同态 $p_*: \pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\to\pi_1(X,x_0), q_*: \pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\to\pi_1(Y,y_0)$. 定义同态 $(p_*,q_*): \pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\to\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$ 为 $(p_*,q_*)[\alpha]=(p_*[\alpha],q_*[\alpha])$, 任意 $[\alpha]\in\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))$.

另一方面，对任意 x_0 为基点的闭路 $\sigma: I\to X, y_0$ 为基点的闭路 $\tau: I\to Y$, 定义 $(\sigma,\tau): I\to X\times Y$ 为 $(\sigma,\tau)(t)=(\sigma(t),\tau(t))$. 因此 (σ,τ) 为 (x_0,y_0) 为基点的闭路. 令 $\varphi: \pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)\to\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))$ 为 $\varphi([\sigma],[\tau])=[(\sigma,\tau)]$. 容易验证 φ 是唯一定义的，且 φ 与 (p_*,q_*) 互逆. 故 $(p_*.q_*)$ 是同构.

例 2.18 环面 $S^1\times S^1$ 的基本群 $\pi_1(S^1\times S^1)\cong Z\oplus Z$. 这是自由交换群，和例 2.14 中 $\pi_1(S^1\vee S^1)$ 是不相同的，后者是非交换的自由群.

下面叙述关于两个多面体的并集的基本群的定理. 为此设复形 K 有两个子复形 L,M 使 $K=L\cup M$, 而且令 $N=L\cap M$. $i: |N|\hookrightarrow|L|, j: |N|\hookrightarrow|M|$ 为内射.

定理 2.19(Van Kampen) 若 $|L|, |M|, |N|$ 道路连通，且 a^0 为 N 的一个顶点，则 $\pi_1(|K|,a^0)$ 是由 $\pi_1(|L|,a^0)*\pi_1(|M|,a^0)$ 加上关系组成员 $\{(i_*c)(j_*c)^{-1}\mid c$ 为 $\pi_1(|N|,a^0)$ 生成元$\}$ 所构成的群.

证：设 T_N 为 N 的最大树，由命题 2.9, T_N 含有 N 所有顶点. 设 b 是 $L\backslash N$ 中顶点. 由第二章命题 2.2 和 $|L|$

道路连通，a^0 和 b 可由 $|L|$ 中棱道 $a^0a^1\ldots a^nb$ 连接. 因为 $a^0\in N$ 而 $b\in L\backslash N$, 可设 a^r 为最后一个属于 N 的顶点，而 $a^{r+1}\in L\backslash N$. 这样 (a^r,a^{r+1}) 是 $L\backslash N$ 中 1 维单形. 令 $\overline{T_N}=T_N\cup(a^r,{}^{r+1})\cup a^{r+1}$, 则 $|\overline{T}_N|\simeq|T_N|$, 因为单形 (a^r,a^{r+1}) 可以收缩到 a^r. 因此 T_N 可扩大为 $\overline{T}_N$ 仍为树. 如此继续下去，T_N 可扩大为 $T_L\supset T_N$ 使 T_L 是含有 L 所有顶点的树.

同理，T_N 可以扩大为 $T_M\supset T_N$, 使 T_M 为含有 M 所有顶点的树，而且 $T_N=T_L\cap T_M$. 令 $T_K=T_L\cup T_M$, 则 T_K 是含 K 所有顶点的树.

将 K 的所有顶点排序，因此子复形 L,M,N 的所有顶点也随之排了序. 根据定理 2.7 和 2.11, $\pi_1(|K|,a^0)$ 有以下生成元组和关系组：

$$\begin{aligned}\text{生成元组:}A &= \{g_{ij}\mid(a^i,a^j)\text{是}K\backslash T_K\text{有序 1 维单形}\}\\ \text{关系组:}B &= \{g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1}\mid(a^i,a^j,a^k)\text{是}K\backslash T_K\text{有序2维单形}\}\end{aligned}$$

另一方面 $\pi_1(|L|,a^0)*\pi_1(|M|,a^0)$ 有以下生成元组 C 和关系组 D:

$$\begin{aligned}\text{生成元组:}C &= \{g_{ij}\mid(a^i,a^j)\text{是}L\backslash T_L\text{有序单形}\}\cup\\ &\quad\ \{h_{ij}\mid(a^i,a^j)\text{是}M\backslash T_M\text{有序单形}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{关系组:}D &= \{g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1}\mid(a^i,a^j,a^k)\text{是}L\backslash T_L\text{有序 2- 单形}\}\cup\\ &\quad\ \{h_{ij}h_{jk}h_{ik}^{-1}\mid(a^i,a^j,a^k)\text{是}M\backslash T_M\text{有序 2- 单形}\}\end{aligned}$$

我们比较一下 A 和 C, B 和 D. 因为 $L\cup M=K, L\cap M=N$, 因此如果对于 $(a^i,a^j)\in N\backslash T_N=(L\backslash T_L)\cap(M\backslash T_M)$ 所对应的 g_{ij} 和 h_{ij} 看作相同，即令 $g_{ij}=h_{ij}$ 当 $(a^i,a^j)\in N\backslash T_N$, 则 C 和 A 将有一一对应关系，而且 B 和 D 也随之有一一对应关系. 因此 $\pi_1(|K|,a^0)=\pi_1(|L|,a^0)*\pi_1(|M|,a^0)$ 再加上关系 $\{(i_*(g_{ij})(j_*g_{ij})^{-1}\mid g_{ij}\in\pi_1(|N|,a^0)\}$.

推论 2.20 以上定理中，若更进一步有 $|N|$ 单连通，则

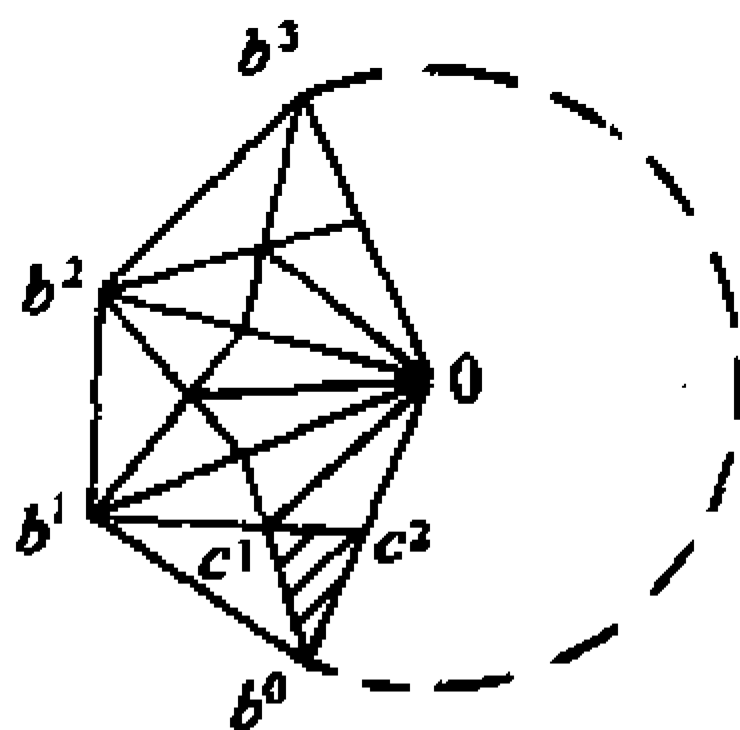
$$\pi_1(|K|,a^0)\cong\pi_1(|L|,a^0)*\pi_1(|M|,a^0)$$

例 2.21 $\pi_1(S^1\vee S^1)\cong\pi_1(S^1)*\pi_1(S^1)$，再用归纳法可得出 $\pi_1(S^1\vee\cdots\vee S^1)\cong\pi_1(S^1)*\cdots*\pi_1(S^1)\cong Z*\cdots*Z$. 这个结果和例 2.14 一样.

例 2.22 道路连通多面体 $|K|$ 的双角锥 $S|K|$ 是单连通的.

证：容易说明 $S|K|$ 道路连通. 另外 $S|K|=C_+|K|\cup C_-|K|$，即上半锥和下半锥的并集. 因此 $\pi_1(S|K|)\cong\pi_1(C_+|K|)*\pi_1(C_-|K|)$ 再加上某些关系. 但是锥形可缩，因此 $\pi_1(C_+|K|)=\pi_1(C_-|K|)=0$，故 $\pi_1(S|K|)=0$.

Van Kampen 定理 2.19 还有以下更重要的推论. 设 $|K|$ 是道路连通多面体，$\alpha=a^0a^1\dots a^na^0$ 是 K 的闭棱道，其中相邻顶点都不相同. 将圆周 S^1 作 $n+1$ 等分，等分点为 $b^0,b^1,\dots,b^n$. 令 $f:S^1\to|K|$ 为映射，使 $f(b^i)=a^i$ 且将弧 $\widehat{b^ib^{i+1}}$ 连续的映成单形 (a^i,a^{i+1}). 设 $X=|K|\cup_fE^2$ 是 $|K|$ 和 E^2 的不相交并集再将每个 $x\in S^1$ 与 $f(x)\in|K|$ 粘合而得的商空间. $X=|K|\cup_fE^2$ 称为由 $|K|$ 沿棱道 α 粘贴一个圆盘. 有许多空间可以通过这种方式得到.



推论 2.23 设 X 如上，则 $\pi_1(X,a^0)$ 是 $\pi_1(|K|,a^0)$ 再增加一个关系 $\theta[\alpha]$ 所成的群，其中 $\theta:\pi(K,a^0)\to\pi_1(|K|,a^0)$ 如定理 2.7.

证：设 L 为 E^2 的剖分如上图，使在 E^2 的边界 S^1 上，L 构成一个棱道 $b^0b^1b^2\cdots b^nb^0$. 下面给出 X 的剖分. 设 $\mathcal{N}$ 是抽象复形，它由 K 和 L 的抽象化将顶点 a^r 和 b^r 叠合 $(0\leq r\leq n)$. 这样，自动的抽象单形 (a^r,a^{r+1}) 和 (b^r,b^{r+1}) 叠合. 此外没有别的单形相叠合.

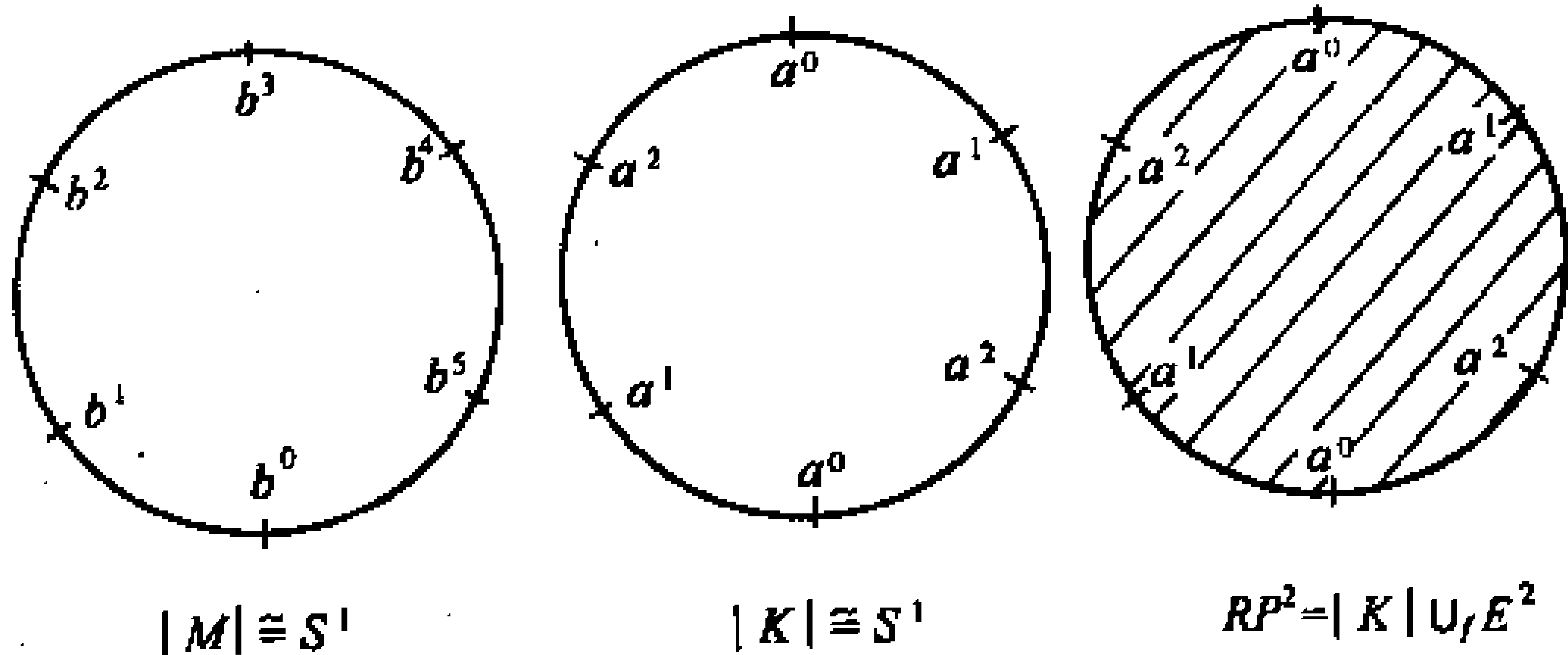
因此，若 N 是 $\mathcal{N}$ 的几何实现，则 $|N|\cong X$，从而 N 是 X 的剖分. 选取 L 中单形 $\sigma=(b^0,c^1,c^2)$，如图中阴影，并且令 $Y=|N\backslash\sigma|$. 因此 $X=|N-\sigma|\cup|K(\sigma)|$，而 $|N-\sigma|\cap|K(\sigma)|=\dot{\sigma}$. 由定理 2.19, $\pi_1(X,a^0)=\pi_1(Y,a^0)*\pi_1(|K(\sigma)|,a^0)$ 再加上关系组

$$\{(i_*d)(j_*d)^{-1}\mid d\text{是}\pi_1(|\dot{\sigma}|)\text{的生成元}\}$$

但是 $|K(\sigma)|=\sigma$ 可缩，$\pi_1(|K(\sigma)|)=0$，而 $\pi_1(|\dot{\sigma}|)\cong\pi_1(S^1)\cong Z$ 由 $\theta[\beta]$ 生成，其中 β 为棱道 $\beta=b^0c^1c^2b^0$. 因此 $\pi_1(X,a^0)=\pi_1(Y,a^0)$ 再加上一个关系 $\theta[\beta]$，其中 $\theta:\pi(N\backslash\sigma,a^0)\longrightarrow\pi_1(|N-\sigma|,a^0)$.

另外，由于 $|L|=E^2$ 是凸集，存在形变收缩 $\rho:Y\overset{\simeq}{\to}|K|$，从而 $\rho_*:\pi_1(Y,a^0)\to\pi_1(|K|,a^0)$ 为同构，而经过 $\rho_*,\theta[\beta]$ 变成 $\theta[\alpha]$. 推论因此得证.

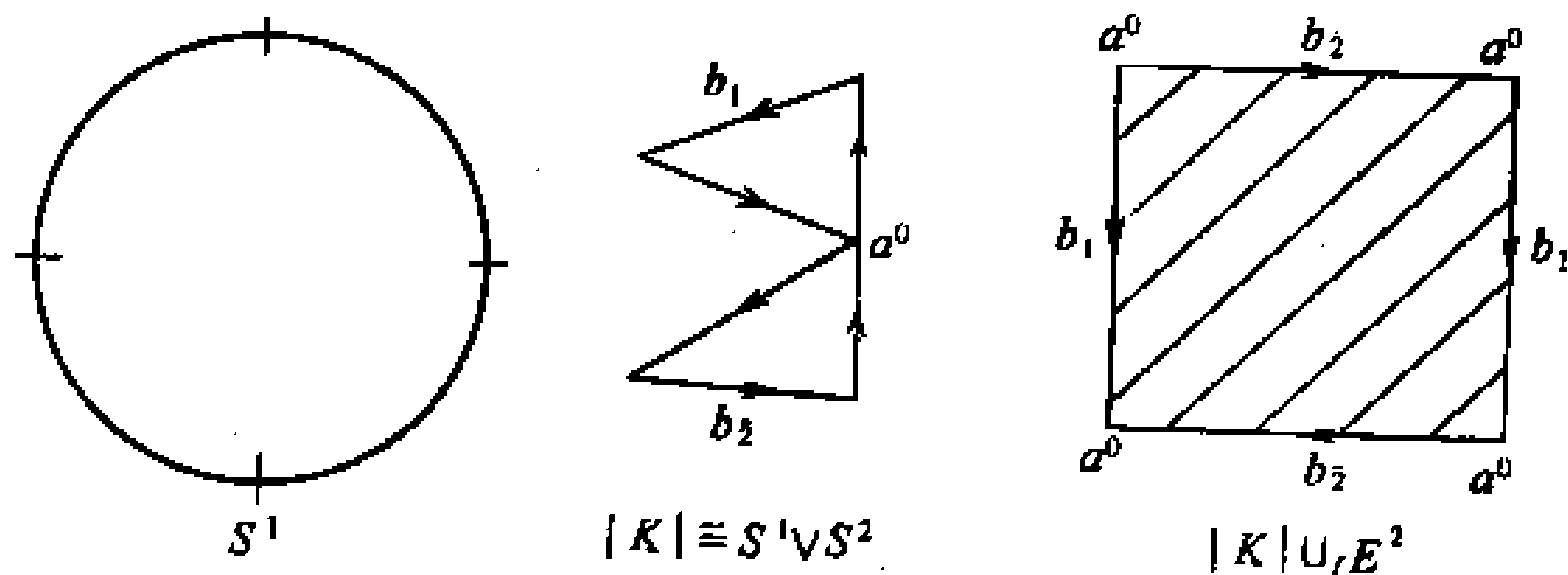
例 2.24 设 M,K 都是 S^1 的剖分如下图所示.



$f:|M|\to|K|$ 为映射使 $f(b^0)=a^0,f(b^1)=a^1,f(b^2)=a^2,f(b^3)=a^0,f(b^4)=a^1,f(b^5)=a^2$，且每段弧映成相应

弧段，则 $RP^2=|K|\cup_f E^2$，即由 $|K|$ 沿着闭棱道 $\alpha=a^0a^1a^2a^0a^1a^2a^0$ 粘贴一个圆盘．由推论 2.23，$\pi_1(RP^2)=\pi_1(|K|)$ 再加上关系 $\theta[\alpha]$．但是 $\pi_1(|K|)\cong\pi_1(S^1)\cong Z$ 由 $\theta[\beta],\beta=a^0a^1a^2a^0$ 所生成，因此 $\pi_1(RP^2)=G_p\{\theta[\beta];\theta[\alpha]\}=G_p\{\theta[\beta];\theta[\beta]^2\}=Z_2$．

例 2.25　设 K 为 $S^1\vee S^1$ 的剖分，简单的记为 K 由两个以 a^0 为基点的闭棱道 b_1,b_2 所组成．如图所示．



设 $f:S^1\to|K|$ 为映射使 $f(S^1)$ 为 K 的闭棱道 $\alpha=b_1b_2b_1^{-1}b_2$，即 f 将 S^1 的第一个四等分弧段映成闭棱道 b_1，第二个四等分弧段映成 b_2，第三个映成 b_1^{-1}，第四个映成 b_2，则 $X=|K|\cup_f E^2$ 就是 Klein 瓶，如上图所示．

由推论 2.23，Klein 瓶 X 的基本群 $\pi_1(X)=\pi_1(|K|)$ 再加上一个关系 $\theta[\alpha]$．因为 $\pi_1(|K|)=G_p\{b_1,b_2\}$ (见例 2.14)，因此 $\pi_1(X)=G_p\{b_1,b_2;b_1b_2b_1^{-1}b_2\}$．

以上给出了基本群的计算方法及一些例子．下面利用一些空间计算结果给出一些应用．这些应用都采用了代数拓扑的典型方法，可以看出它比其他数学分支的方法有一定的优越性．

首先是区别空间的伦型．由于基本群是伦型不变量，因此若两个空间的基本群不同构，则空间的伦型就不相同，当然也互不同胚．

定理 2.26　(1)S^1 不同伦等价于 $S^n(n>1)$；(2)$S^1\times S^1$ 不

同伦等价于 S^2.

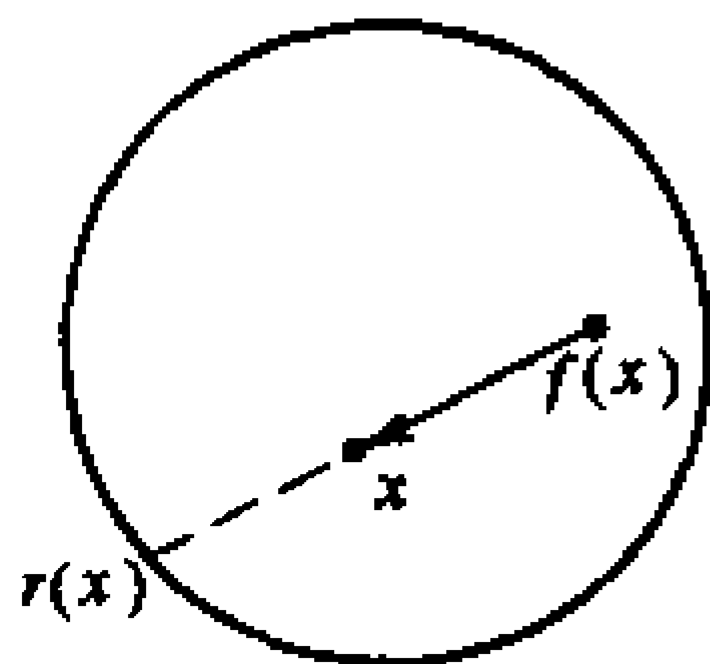
证: (1) 因为 $\pi_1(S^1\times S^1)\cong Z$, 而 $\pi_1(S^n)=0$, 故 S^1 不同伦等价于 $S^n(n>1)$.

(2) 因为 $\pi_1(S^1\times S^1)\cong Z\oplus Z, \pi_1(S^2)=0$, 故 $S^1\times S^1$ 不同伦等价于 S^2.

Brouwer 不动点定理是在微分方程等分支中有广泛应用的定理. 它有许多证法, 都比较麻烦, 而代数拓扑证法则是很简洁漂亮的. 下面用基本群来证明 2 维圆盘的 Brouwer 不动点定理.

定理 2.27(Brouwer) 任意映射 $f: E^2\to E^2$ 有不动点, 即至少存在一点 $x\in E^2$ 使 $f(x)=x$.

证: 用反证法. 设 $f: E^2\to E^2$ 没有不动点, 即对任 $x\in E^2, f(x)\neq x$. 延长有向线段 $\overrightarrow{f(x),x}$ 交 E^2 的边界于 $r(x)$ 点, 则有对应 $r: E^2\to S^1$. 容易证明 r 连续 (习题), 而且 $r|_{S^1}=1_{S^1}$.



这就是说 r 是收缩, S^1 是 E^2 的收缩核, 这将是不可能的. 设 $i: S^1\hookrightarrow E^2$ 为内射, 则有 $ri=1_{S^1}$, 从而导出的同态

$$r_*i_*=1:\pi_1(S^1)\xrightarrow{i_*}\pi_1(E^2)\xrightarrow{r_*}\pi_1(S^1)$$

因为 E^2 可缩, $\pi_1(E^2)=0$, 故 $r_*i_*=0$, 矛盾.

高等代数中的代数基本定理, 在历史上有许多不同的证法, 大多是很复杂的. 现在用基本群给出它的一个很简单的证明.

定理 2.28(代数基本定理)　设 C 表示复数域,

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,\quad z\in C$$

是 $n\geq 1$ 次复系数多项式, 则存在 $z_0\in C$ 使 $f(z_0)=0$.

证: 因为 $a_0\neq 0$, 用 a_0 除多项式可使最高次项系数为 1 而不影响定理结论. 因此不妨设

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,\quad z\in C\cong R^2$$

假设对任 $z\in C$ 有 $f(z)\neq 0$, 令 (注意到 $S^1=\{z\in C\mid \|z\|=1\}$)

$$G: S^1\times I\to S^1,\quad G(z,t)=\frac{f(tz)}{\|f(tz)\|},\quad z\in S^1, t\in I$$

$$H: S^1\times I\to S^1, H(z,t)=\frac{z^n+ta_1z^{n-1}+\cdots+t^na_n}{\|z^n+ta_1z^{n-1}+\cdots+t^na_n\|}, z\in S^1, t\in I$$

并且记 $g_t(z)=G(z,t), h_t(z)=H(z,t)$. 因此有 $g_0\overset{G}{\simeq}g_1, h_0\overset{H}{\simeq}h_1$. 但是 $g_1=h_1$, 因此 $g_0\simeq h_0$. 注意到 $g_0: S^1\to S^1$ 是常值映射, 而 $h_0: S^1\to S^1$ 有 $h_0(z)=z^n$. 下面将导出矛盾.

令 $\alpha: I\to S^1$ 为 $\alpha(t)=e^{2\pi it}$, 则 $[\alpha]$ 是 $\pi_1(S^1,1)\cong Z$ 的生成元. $h_{0*}[\alpha]=[h_0\alpha]$, 其中 $h_0\alpha(t)=\alpha(t)^n$. 因为 S^1 是拓扑群, 由 §1 习题 7 可知, $[h_0\alpha]=n[\alpha]$.

另一方面由 $g_0\simeq h_0$, 存在 $F: S^1\times I\to S^1$ 使 $F(z,0)=g_0(z), F(z,1)=h_0(z)$. 令 $\omega: I\to S^1$ 为 $\omega(t)=F(1,t)$. 则容易证明 $h_{0*}=\omega_{\#}g_{0*}$, 从而 $n[\alpha]=h_{0*}[\alpha]=\omega_{\#}g_{0*}[\alpha]=0$(因为 g_0 是常值), $n=0$ 矛盾.

习　题

1. 试给出平环的一个剖分, 并用棱道群计算它的基本群.
2. 计算 $S^n\vee S^m$ 和 n 维环面 $S^1\times\ldots\times S^1$ 的基本群.
3. 计算环面 $S^1\times S^1$ 去掉一个 2 维单形内点后的基本群. (提示: 利用 $S^1\vee S^1$ 是它的形变收缩核)

4. 在例 2.25 中，Klein 瓶 X 的基本群 $\pi_1(X) = G_p\{b_1, b_2; b_1b_2b_1^{-1}b_2\}$. 证明：$b_2$ 生成的子群是正规子群且对它的商群是无限循环群. 再证明 b_1 生成的群是无限循环群.

5. 试作出它的基本群是模 n 整数加群 Z_n 的空间.

6. 设 $|K| = S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1, \omega_i$ 是绕第 i 个 S^1 走一圈的闭棱道 $(i = 1, 2, 3, 4)$. 并设 X 和 Y 是由 $|K|$ 沿闭棱道

$$\alpha = \omega_1 * \omega_2 * \omega_1^{-1} * \omega_2^{-1} * \omega_3 * \omega_4 * \omega_3^{-1} * \omega_4^{-1}$$

$$\beta = \omega_1 * \omega_2 * \omega_3 * \omega_4 * \omega_1^{-1} * \omega_2^{-1} * \omega_3^{-1} * \omega_4^{-1}$$

粘上一个圆盘所得的空间. 证明： $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

7. 试证明以下对一般拓扑空间的 Van Kampen 定理的特殊情况：设 $X = A \cup B$, A 与 B 均为单连通开集且 $A \cap B$ 道路连通，则 X 也是单连通. （提示：直接证 X 上闭路零伦）

8. 若空间 X 使得任意映射 $f: X \to X$ 有不动点，称 X 为具有不动点性质的空间. 证明若 X 具有不动点性质，A 是 X 的收缩核，则 A 也具有不动点性质.

9. 证明：半开区间 $[a, b)$ 不具有不动点性质.

10. 设映射 $f: S^1 \to S^1$ 没有不动点，则 $f \simeq g$, 其中 $g: S^1 \to S^1$ 为对径映射 $g(x) = -x$(任 $x \in S^1$). 利用 S^1 的"八面形剖分"再证明 $f_*: \pi_1(S^1, a^0) \to \pi_1(S^1, f(a^0))$ 为同构.

11. 已给两个实变量连续函数 $F_1(x, y), F_2(x, y)$. 设 $f: R^2 \to R^2$ 定义为 $f(x, y) = (F_1(x, y) + x, F_2(x, y) + y)$ 且使 $f(E^2) \subset E^2$. 证明：方程组 $F_1(x, y) = 0, F_2(x, y) = 0$ 在 E^2 中有解.

§3 应用：覆盖映射和覆盖空间

作为应用，本节将讨论一类覆盖映射 $p: E \to B$, 它是从覆盖空间 E 到底空间 B 的映射. 基本群在处理覆盖映射的某些性质及分类中起了重要作用.

定义 3.1 空间 E, B 之间的映射 $p: E \to B$ 叫做 *覆盖映射*, 如果对 B 的每点 b, 存在 B 的道路连通开集 U 使 $b \in U$, 而且 p 将 $p^{-1}(U)$ 的每个道路分支同胚的满映 U. 此时 E 叫做 *覆盖空间*, B 叫做 *底空间*. 而以上的开集 U 叫做 *可许邻域*, $p^{-1}(U)$ 的每个道路分支叫做它的一个片.

例 3.2 实直线 R 是单位圆周 S^1 的覆盖空间, 其覆盖映射 $p: R \to S^1$ 为 $p(t) = e^{i2\pi t} = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t, \quad t \in R^1$. S^1 的任一开弧都可以作为可许邻域. 特别地, 对 $1 \in S^1$, 取可许邻域 U 为 S^1 上由 $-i$ 到 i 的开弧, 则 $p^{-1}(U) = \cup_{n=-\infty}^{+\infty}(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$. 容易看出, p 将 $p^{-1}(U)$ 的每个片 $(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$ 同胚的映射到 U.

例 3.3 n 维球面 S^n 是射影空间 RP^n 上的覆盖空间, 其覆盖映射就是商映射 $p: S^n \to RP^n$, 其中 $p(x) = [x], x \in S^n$. 对 $p(x) \in RP^n$ 取以 $x \in S^n$ 为极点的 S^n 中开半球 U_x, 则 $p^{-1}p(U_x)$ 是 U_x 和另一个以 $-x$ 为极点的开半球 U_{-x} 的不交并集. 因此 $p(U_x)$ 是 RP^n 的开集, 而且 p 分别将 U_x 和 U_{-x} 的同胚映满 $p(U_x)$, $p(U_x)$ 是可许邻域.

下面我们讨论覆盖映射的一些基本性质, 首先是以下的提升唯一性定理.

定理 3.4 设 $p: (E, e_0) \to (B, b_0)$ 为保基点的覆盖映射, $f: (X, x_0) \to (B, b_0)$ 为任一映射并假设 X 连通. 如果 E 局部道路连通且存在映射 $f': (X, x_0) \to (E, e_0)$ 使 $pf' = f$(此时称 f' 为 f 的提升), 则它是唯一的.

证: 设另有 $f'': (X, x_0) \to (E, e_0)$ 使 $pf'' = f$. 令 $A = \{x \in X \mid f'(x) = f''(x)\}, D = \{x \in X \mid f'(x) \neq f''(x)\}$, 则 X 是 A 与 D 的不交并集. 下面证明 A, D 都是开集, 从而由 X 的连通性导出 D 空而 $A = X$.

对 $x_1 \in A, f'(x_1) = f''(x_1)$. 取 $f(x_1) \in B$ 的可许邻域 U, 则 $f'(x_1) = f''(x_1)$ 属于 $p^{-1}(U)$ 的一个片 V. 因为 E 局部道路连通, 因此开集 $p^{-1}(U)$ 的道路分支 V 是 E 的开集 (习

题，可参见第一章 §6 习题 10, 11) 从而 $(f')^{-1}(V)\cap(f'')^{-1}(V)$ 是含 x_1 点的 X 中开集. 对 $x\in(f')^{-1}(V)\cap(f'')^{-1}(V), f'(x)$ 和 $f''(x)$ 都在 V 中，且 $pf'(x)=pf''(x)$. 因为 p 将 V 同胚的映满 U, 因此 $f'(x)=f''(x)$, 即 $x\in A$. 因此， $x_1\in(f')^{-1}(V)\cap f''(V)\subset A$, A 是开集.

对 $x_1\in D, f'(x_1)\neq f''(x_1)$, 因此 $f'(x_1)$ 属于 $p^{-1}(U)$ 的一个片 V_1, 而 $f''(x_1)$ 属于 $p^{-1}(U)$ 的另一个片 V_2. 类似可证, $(f')^{-1}(V_1)\cap(f'')^{-1}(V_2)\subset D$ 是 x_1 的开邻域，从而推出 D 是开集. 证毕.

定理 3.5 设 $p:(E,e_0)\to(B,b_0)$ 为覆盖映射，且 E 局部道路连通. 若 $u:I\to B$ 是 B 中起点为 b_0 的道路，则存在 E 中唯一的起点为 e_0 的道路 $\omega:I\to E$ 使 $p\omega=u$.

证: ω 的唯一性可由定理 3.4 得出，下面证明 ω 的存在性.

情况 1: u 将整个 I 映到 b_0 的某个可许邻域 U 中. 设 e_0 属于 $p^{-1}(U)$ 的某个片 V, 而 $\phi:U\to V$ 为同胚 $p|_V:V\to U$ 的逆，则 $\omega=\phi u:I\to V\subset E$ 为所求的 u 的提升.

一般情况: 由覆盖映射的定义，存在 B 的开覆盖 $\{U_b\}_{b\in B}$ 使每个 U_b 为可许邻域，因此 $\{u^{-1}(U_b)\}_{b\in B}$ 是 I 的开覆盖. 由 I 紧，存在 Lebesgue 数 $\delta>0$. 将 I 分割为 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ 使 $t_{i+1}-t_i<\delta(i=0,1,\ldots,n-1)$, 则 u 将每个区间 $[t_i,t_{i+1}]$ 映到某个可许邻域 U_b 中. 由情况 1, $u\mid[0,t_1]:[0,t_1]\to B$ 存在提升 $u_1:[0,t_1]\to E$ 使 $u_1(0)=e_0$. 归纳假设 $u\mid[0,t_i]:[0,t_i]\to B$ 已存在提升 $u_i:[0,t_i]\to E$ 使 $u_i(0)=e_0$. 那么由情况 1, 可以作出 $u\mid[t_i,t_{i+1}]$ 的提升 $u_{i,i+1}:[t_i,t_{i+1}]\to E$ 使 $u_{i,i+1}(t_i)=u_i(t_i)$. 将 u_i 和 $u_{i,i+1}$ 粘合在一起就得到 $u\mid[0,t_{i+1}]$ 的提升 u_{i+1}, 从而完成了归纳法, $u_n=\omega:I=[0,t_n]\to E$ 为所求，证毕.

定理 3.6(覆盖同伦定理) $p:(E,e_0)\to(B,b_0)$ 如同定理 3.5 中所述. 设 Y 为紧度量空间， $f:(Y,y_0)\to(B,b_0)$ 为映

射使得它有提升 $f': (Y, y_0) \to (E, e_0)$, 即 $pf' = f$, 则对满足 $F(y,0) = f(y)$ 的任一个同伦 $F: Y \times I \to B$, 存在 F 的提升 $F': Y \times I \to E$ 使对任 $y \in Y$ 有 $F'(y,0) = f'(y)$.

证：和定理 3.5 的证明类似，存在 B 的由可许邻域组成的开覆盖 $\{U_b\}_{b\in B}$, 从而 $\{F^{-1}(U_b)\}$ 是紧度量空间 $Y \times I$ 的开覆盖，具有 Lebesgue 数 $\delta > 0$. 因此对每个 $y \in Y$ 可找到开邻域 N_y 和 I 的分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$(依赖于 y), 使 F 将 $N_y \times [t_i, t_{i+1}]$ 映到某个可许邻域 U_b 中. 利用和定理 3.5 中类似的归纳法，存在 $F: N_y \times I \to B$ 的提升 $F': N_y \times I \to E$ 使对任意 $y' \in N_y$ 有 $F'(y', 0) = f'(y')$.

对 $y, y' \in Y, F$ 在 $N_y \times I$ 和 $N_{y'} \times I$ 的两个提升在 $(N_y \cap N_{y'}) \times I$ 上是一致的. 理由是：对 $y_1 \in N_y \cap N_{y'}$, 我们有 $F \mid y_1 \times I$ 的两个提升使在 $(y_1, 0)$ 点上两者一致，由提升唯一性定理及 $y_1 \times I$ 连通可知 $F \mid y_1 \times I$ 的这两个提升相等. 因此我们可以将 F 的所有在 $N_y \times I (y \in Y)$ 上的提升粘合在一起得到所要求的 $F': Y \times I \to E$. 证毕.

推论 3.7 设 $p: (E, e_0) \to (B, b_0)$ 如同定理 3.6, $\overline{\alpha}, \overline{\beta}: I \to E$ 为道路使 $\overline{\alpha}(0) = \overline{\beta}(0)$. 如果 $p\overline{\alpha} \simeq p\overline{\beta} \quad \text{rel} \quad 0, 1$, 则 $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ 必有相同终点而且 $\overline{\alpha} \simeq \overline{\beta} \quad \text{rel} \quad 0, 1$.

证：设 b_0, b_1 为 $p\overline{\alpha}, p\overline{\beta}$ 共同的起点和终点，存在同伦 $H: I \times I \to B$ 使 $H(-, 0) = p\overline{\alpha}, H(-, 1) = p\overline{\beta}$, 而 $H(0, t) = b_0$, $H(1, t) = b_1$. 由定理 3.6, 存在 H 的提升 $\overline{H}: I \times I \to E$ 使 $\overline{H}(0, 0) = e_0, p\overline{H} = H$. $\overline{\alpha}$ 和 $\overline{H}(-, 0)$ 都是 $p\overline{\alpha}$ 的提升，且有相同的起点 e_0, 由定理 3.5, $\overline{\alpha} = \overline{H}(-, 0)$. 类似的有 $\overline{H}(-, 1) = \overline{\beta}$.

下面证明 $\overline{H}(0, -)$ 和 $\overline{H}(1, -)$ 都是常值道路. 因为 $\overline{H}(0, -)$ 是常值道路 $H(0, -)$ 的提升使 $\overline{H}(0, 0) = e_0$, 由道路提升唯一性可知常值道路的提升必是常值道路. 类似的，$\overline{H}(1, -)$ 也是常值道路，所取的唯一可能的值为 $\overline{\alpha}(1) = \overline{H}(1, 0) = \overline{H}(1, 1) = \overline{\beta}(1)$, 即 $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ 有共同的终点. 显然 $\overline{H}$ 是 $\overline{\alpha} \simeq \overline{\beta} \quad \text{rel} \quad 0, 1$ 的同伦. 证毕.

推论 3.8 设 $p:(E,e_0)\to(B,b_0)$ 如同定理 3.5 所述，则 $p_*:\pi_1(E,e_0)\to\pi_1(B,b_0)$ 是单同态.

证：由推论 3.7 直接得出. 证毕.

以上我们讨论了 B 的道路可以提升到覆盖空间 E 的问题. 下面我们考虑一般映射 $f:(X,x_0)\to(B,b_0)$ 什么时候有提升，这时基本群将起重要作用. 首先，若 f 有提升 $f':(X,x_0)\to(E,e_0)$，即 $pf'=f$，则有 $f_*(\pi_1(X,x_0))=p_*f'_*(\pi_1(X,x_0))$，从而有 $f_*(\pi_1(X,x_0))\subset p_*(\pi_1(E,e_0))$. 我们指出，对适当的 X，这个必要条件也是充分的，这就是以下定理.

定理 3.9 $p:(E,e_0)\to(B,b_0)$ 如同定理 3.5 所述. 设 X 道路连通且局部道路连通，则任意映射 $f:(X,x_0)\to(B,b_0)$ 存在提升 $f':(X,x_0)\to(E,e_0)$ 当且仅当 $f_*(\pi_1(X,x_0)\subset p_*(\pi_1(E,e_0))$.

证：必要性是显然的，为证明充分性，我们构造 f 的提升 $f':(X,x_0)\to(E,e_0)$ 如下. 对 $x\in X$，任取由 x_0 到 x 的道路 $u:I\to X$. 由定理 3.5, 存在道路 fu 的提升 $\overline{u}:I\to E$ 使 $p\overline{u}=fu$. 令 $f'(x)=\overline{u}(1)$，我们需要证明 $f'(x)$ 的定义不依赖于 u 的选择. 若另有由 x_0 到 x 的道路 $v:I\to X$，则 $u*v^{-1}:I\to X$ 为以 x_0 为基点的闭路. 由设 $f_*[u*v^{-1}]\in p_*(\pi_1(E,e_0))$，即有闭路 $\omega:I\to E$ 使 $[fu*fv^{-1}]=p_*[\omega]=[p\omega]$，从而有某个闭路 $\omega:I\to E$ 使 $fu*fv^{-1}=p\omega$. 因此若 $fu=p\overline{u}, fv=p\overline{v}$，则必有 $\overline{u}(1)=\overline{v}(1)$，证明了 $f':X\to E$ 唯一定义.

下面证明 $f':X\to E$ 的连续性. 对 $x\in X$ 和 $f'(x)$ 的开邻域 V，取 $f(x)=pf'(x)$ 的可许邻域 $U_{f(x)}$，则 $f'(x)$ 属于 $p^{-1}(U_{f(x)})$ 的某个片 V'，令 $U=p(V\cap V')$. 因为 $p:E\to B$ 是开映射 (习题)，则 U 为开集且 $U\subset U_{f(x)}$，从而 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开集. 因为 $x\in f^{-1}(U)$ 且 X 局部道路连通，因此存在 x 的开邻域 W，使 W 中任意两点可由 $f^{-1}(U)$ 中的道路连接. 只需证明 $f'(W)\subset V$，即可得出 f' 连续.

对 $x_1\in W$, u 为 X 的由 x_0 到 x_1 的道路，而 $\overline{u}:I\to E$

为 fu 的提升，因此 $f'(x_1)=\overline{u}(1)$. 现在 $x,x_1\in W$ 存在 $f^{-1}(U)$ 中由 x_1 到 x 的道路 $u_1:I\to f^{-1}(U)$, 而 fu_1 的提升为 $\overline{u}_1:I\to V'\cap V$. 因此 $p\overline{u}*p\overline{u}_1=fu*fu_1=f(u*u_1)$, 从而有 $f'(x_1)=\overline{u}(1)=\overline{u_1}(0)\in V$. 证毕.

定理 3.9 将能够给出 B 的两个覆盖空间什么时候是同胚的判断. 关于 B 的覆盖空间的分类，我们将得出，B 的两个覆盖空间是同胚的当且仅当它们决定 $\pi_1(B,b_0)$ 的同一个子群的共轭类.

定义 3.10 由覆盖映射 $p_1:E_1\to B$ 到 $p_2:E_2\to B$ 的 同态 是一个映射 $h:E_1\to E_2$ 使 $p_2h=p_1$. 以上的 h 叫做 同构, 如果更进一步有 h 是同胚.

定理 3.11 设 E_1,E_2 都是道路连通且局部道路连通, $p_1:(E_1,e_1)\to(B,b_0)$ 和 $p_2:(E_2,e_2)\to(B,b_0)$ 为覆盖映射, 则存在同构 $h:E_1\to E_2$ 使 $h(e_1)=e_2$ 当且仅当 $p_{1*}\pi_1(E_1,e_1)=p_{2*}\pi_1(E_2,e_2)$.

证: 必要性是显然的. 对于充分性, 由定理 3.9, 存在 $p_1:E_1\to B$ 的提升 $h:E_1\to E_2$ 使 $p_2h=p_1$ 且 $h(e_1)=e_2$. 同样由定理 3.9, 存在 $p_2:E_2\to B$ 的提升 $g:E_2\to E_1$ 使 $p_1g=p_2$ 且 $g(e_2)=e_1$. 因此 $p_1gh=p_2h=p_1\cdot 1_{E_1}$. 因为 gh 和 1_{E_1} 在 e_1 点上一致，由提升唯一性定理得出 $gh=1_{E_1}$. 同理 $hg=1_{E_2}$, 从而 $h:E_1\to E_2$ 是同胚. 证毕.

定理 3.12 设 E_1,E_2 都是道路连通且局部道路连通的. 覆盖映射 $p_1:E_1\to B$ 和 $p_2:E_2\to B$ 是同构的当且仅当对任意 $e_1\in p_1^{-1}(b_0),e_2\in p_2^{-1}(b_0),p_{1*}\pi_1(E_1,e_1)$ 和 $p_{2*}\pi_1(E_2,e_2)$ 属于 $\pi_1(B,b_0)$ 的同一个子群的共轭类.

证: 注意到群 G 的子群 H,K 是共轭的当且仅当存在 $x\in G$ 使 $H=x^{-1}Kx$. 因此必要性是要证明存在 $x\in\pi_1(B,b_0)$ 使 $p_{2*}\pi_1(E_2,e_2)=x^{-1}[p_{1*}\pi_1(E_1,e_1)]x$. 由设，存在同构 $h:E_1\to E_2$ 使 $p_2h=p_1$ 且 $h(e_1)=e_2'$, 从而由定理 3.11, $p_{1*}\pi_1(E_1,e_1)=p_{2*}\pi_1(E_2,e_2')$. 设 $u:I\to E_2$ 为由 e_2' 到 e_2 的道路，由定理

1.14, $\pi_1(E_2,e_2)=u_{\#}[\pi_1(E_2,e_2')]$, 其中 $u_{\#}[\alpha]=[u^{-1}*\alpha*u]$, 因此

$$\begin{aligned} p_{2*}\pi_1(E_2,e_2) &= p_{2*}u_{\#}[\pi_1(E_2,e_2')] \\ &= [p_2u]^{-1}[p_{2*}\pi_1(E_2,e_2')][p_2u] \\ &= [p_2u]^{-1}[p_{1*}\pi_1(E_1,e_1)][p_2u] \end{aligned}$$

下面证明充分性. 由设, 存在 B 的以 b_0 为基点的闭路 $\alpha: I\to B$ 使 $p_{2*}\pi_1(E_2,e_2)=[\alpha]^{-1}[p_{1*}\pi_1(E_1,e_1)][\alpha]$. 由道路提升定理, 存在 α 的提升 $\overline{\alpha}: I\to E_1$ 使 $\overline{\alpha}(0)=e_1$ 而 $e=\overline{\alpha}(1)\in p_1^{-1}(b_0)$. 与必要性中的证明类似, $p_{1*}\pi_1(E_1,e)=[p_1\overline{\alpha}]^{-1}[p_{1*}\pi_1 E_1,e_1)][p_1\overline{\alpha}]=[\alpha]^{-1}[p_{1*}\pi_1(E_1,e_1)][\alpha]=p_{2*}\pi_1(E_2,e_2)$, 从而由定理 3.11, 存在同构 $h: E_1\to E_2$ 使 $p_2h=p_1$ 且 $h(e)=e_2$. 证毕.

若 B 为拓扑空间, 总有覆盖空间使其对应于整个基本群 $\pi_1(B,b_0)$ 的共轭类, 这就是恒等覆盖映射 $1_B: B\to B$. 在另一极端, 存在对应于 $\pi_1(B,b_0)$ 的平凡子群 0 的共轭类的覆盖空间, 我们将称之为泛覆盖空间. 例 3.2 和例 3.3 中 $n\geq 2$ 时的覆盖空间 R 和 S^n 都属于这种情形.

定义 3.13 设 B 为空间, 覆盖映射 $p:\widetilde{B}\to B$ 叫做泛覆盖映射, 如果 $\widetilde{B}$ 是单连通的, 此时称 $\widetilde{B}$ 为 B 的泛覆盖空间.

B 的泛覆盖空间的存在是有条件的. 若 $p:\widetilde{B}\to B$ 是泛覆盖映射, 则在 B 的可许邻域 U_b 中的闭路必能在 B 中同伦于常值闭路 (因为 $\pi_1\widetilde{B}=0$). 这是 $\widetilde{B}$ 存在的必要条件. 下面将指出这也是 $\widetilde{B}$ 存在的充分条件.

定义 3.14 空间 B 叫做半局部单连通的, 若对每个 $b\in B$ 存在 b 的开邻域 U, 使 U 中任一个以 b 为基点的闭路在 B 中同伦于 b 点上常值闭路.

定理 3.15 若 B 道路连通且局部道路连通且半局部单连通, 则 B 存在一个泛覆盖空间 $\widetilde{B}$.

证: 我们的假设可导出 B 有一个拓扑基 $\mathcal{U}$, 使 $\mathcal{U}$ 的每个成员 U 道路连通, 而且内射导出的同态 $\pi_1 U \to \pi_1 B$ 是零同态, 即 U 中闭路在 B 中同伦于常值闭路.

选定 $b_0 \in B$, 考虑 B 中所有以 b_0 为起点的道路. 称这种道路 $\alpha \sim \beta$, 若 $\alpha(1) = \beta(1)$, 且 $\alpha \simeq \beta \quad \text{rel} \quad 0, 1$. 令 (α) 表示道路 α 的等价类, 而 $\widetilde{B}$ 是所有这些等价类 (α) 的集合. 定义 $p: \widetilde{B} \to B$ 为 $p(\alpha) = \alpha(1)$.

对 B 的拓扑基 $\mathcal{U}$ 的每个成员 U 使 $\alpha(1) \in U$, 令 (α, U) 是 $\widetilde{B}$ 的子集, 它由所有 $(\overline{\alpha})$ 组成, 其中 $\overline{\alpha} = \alpha * \alpha'$ 是 U 中道路使 $\alpha'(0) = \alpha(1)$. 我们证明 $\widetilde{B}$ 的子集族 $\{(\alpha, U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ 构成 $\widetilde{B}$ 的拓扑基, 从而使 $\widetilde{B}$ 成为拓扑空间. 设 $(\gamma) \in (\alpha, U) \cap (\beta, V)$, 则 $\gamma(1) \in U \cap V$, 而且 $\gamma \simeq \alpha * \alpha' \simeq \beta * \beta' \quad \text{rel} \quad 0, 1$, 其中 α', β' 分别为 U, V 中道路使 $\alpha'(0) = \alpha(1), \beta'(0) = \beta(1)$. 因为 U, V 是拓扑基 $\mathcal{U}$ 的成员, 因此存在 $W \in \mathcal{U}$, 使 $\gamma(1) \in W \subset U \cap V$, 因此 $(\gamma, W) \subset (\alpha, U) \cap (\beta, V)$.

下面证明 $p: \widetilde{B} \to B$ 是覆盖映射. 由 $\widetilde{B}$ 的构造, 有以下两点成立: (1) 对每个 $U \in \mathcal{U}$ 使 $\alpha(1) \in U, p \mid (\alpha, U): (\alpha, U) \to U$ 又单又满. (2) 对于 $U \in \mathcal{U}, b \in U, p^{-1}(U)$ 是使 $p(\alpha) = b$ 的所有 (α, U) 的并集, 而且这些 (α, U) 互不相交. (1) 的证明是容易的, 留给读者去做. 对于 (2), 显然 $p^{-1}(U)$ 含有这个并集. 反之, 设 $(\alpha) \in p^{-1}(U)$, 即 $\alpha(1) \in U$. 因为 U 道路连通, 存在 U 中由 $\alpha(1)$ 到 b 的道路 α', 则 $(\alpha) = ((\alpha * \alpha') * \alpha'^{-1}) \in (\alpha * \alpha', U)$, 而 $p(\alpha * \alpha') = b$. 为证明这些 (α, U) 互不相交, 只要证明如果有 $\gamma \in (\alpha, U) \cap (\beta, U)$, 则 $(\alpha, U) = (\beta, U)$. 由 $\gamma \in (\alpha, U), \gamma \simeq \alpha * \alpha' \quad \text{rel} \quad 0, 1$, 其中 α' 为 U 中道路使 $\alpha'(0) = \alpha(1)$. 对于 $\delta \in (\alpha, U), \delta \simeq \alpha * \alpha'' \quad \text{rel} \quad 0, 1$, 其中 α'' 为 U 中道路使 $\alpha''(0) = \alpha(1)$, 因此 $\delta \simeq \alpha * \alpha' * \alpha'^{-1} * \alpha'' \simeq \gamma * \alpha'^{-1} * \alpha'' \quad \text{rel} \quad 0, 1$, 从而 $(\delta) \in (\gamma, U), (\alpha, U) \subset (\gamma, U)$ 类似可证 $(\gamma, U) \subset (\alpha, U)$, 从而有 $(\gamma, U) = (\alpha, U)$. 同样的, 由 $\gamma \in (\beta, U)$ 可得出 $(\gamma, U) = (\beta, U)$, 从而有 $(\alpha, U) = (\beta, U)$.

由 (2) 可知 $p: \widetilde{B} \to B$ 连续，从而由 (1)，$p \mid (\alpha, U): (\alpha, U) \to U$ 是又单又满的映射．我们推断 $p \mid (\alpha, U)$ 是由 (α, U) 到 U 的开映射．因为 (α, U) 的开集是一些 (β, V) 的并集，其中 $V \subset U$，而且 $V \in \mathcal{U}$，因此由 (1) 得出 $(p \mid (\alpha, U)$ 是开映射，从而 $p \mid (\alpha, U): (\alpha, U) \to U$ 是同胚．因为 U 道路连通，因此 (α, U) 也道路连通，另外由 (2) 得知这些 (α, U) 互不相交，因此每个 $U \in \mathcal{U}$ 是 B 的可许邻域，证明了 $p: \widetilde{B} \to B$ 是覆盖映射．

最后证明 $\widetilde{B}$ 单连通．设 c_{b_0} 是 B 的在 b_0 点的常值闭路．对任意 (α)，我们证明存在 $\widetilde{B}$ 的道路 $\overline{\alpha}: I \to \widetilde{B}$ 连结 (c_{b_0}) 和 (α)，从而 $\widetilde{B}$ 道路连通．对 $s \in I$，定义 $\overline{\alpha}(s) = (\alpha_s)$，其中 $\alpha_s: I \to B$ 为 $\alpha_s(t) = \alpha(st)$．为证明 $\overline{\alpha}$ 的连续性，取 $s_0 \in I$ 和 $U \in \mathcal{U}$ 使 $\alpha_{s_0}(1) = \alpha(s_0) \in U$．由 α 的连续性，存在 $\lambda > 0$ 使当 $| s - s_0 | < \lambda$ 时有 $\alpha_s(1) = \alpha(s) \in U$．因此这时有 $\overline{\alpha}(s) = (\alpha_s) \in (\alpha_{s_0}, U)$，下面还需证明 $\pi_1 \widetilde{B} = 0$．设 τ 是 $\widetilde{B}$ 中在 (c_{b_0}) 点为基点的闭路，记合成 $p\tau = \alpha$．对于这个 α，可做出如上述的 $\overline{\alpha}: I \to \widetilde{B}$，它满足 $p\overline{\alpha} = \alpha$．由提升唯一性定理 $\overline{\alpha} = \tau$ 是 $\widetilde{B}$ 中闭路，因此 $(\alpha) = \overline{\alpha}(0) = (c_{b_0})$，从而 $\alpha \simeq c_{b_0} \quad \text{rel} \quad 0, 1$．再由同伦提升定理可知 $\overline{\alpha} = \tau$ 零伦．证毕．

定理 3.16 设 G 为 $\pi_1(B, b_0)$ 的子群．若 B 道路连通局部道路连通且半局部单连通，则存在 B 的覆盖空间 $\widetilde{B}$ 使 $p_* \pi_1(\widetilde{B}, \widetilde{b}_0) = G$．

证：在定理 3.15 的证明中，我们定义 $\widetilde{B} = \{(\alpha) \mid \alpha: I \to B 使 \alpha(0) = b_0\}$，其中等价类 (α) 中等价关系是 $\alpha \sim \beta$ 当且仅当 $\alpha(1) = \beta(1)$，且 $\alpha \simeq \beta \quad \text{rel} \quad 0, 1$，即 $[\alpha * \beta^{-1}] = [c_{b_0}] \in \pi_1(B, b_0)$．对于本定理，可以类似的定义 $\widetilde{B}$ 如上，只是将等价类 (α) 中等价关系改为 $\alpha \sim \beta$ 当且仅当 $\alpha(1) = \beta(1)$，且 $[\alpha * \beta^{-1}] \in G$．那么只要对定理 3.15 的证明略作些相应的修改，完全类似的可证明 $p: \widetilde{B} \to B$ 是覆盖映射且 $\widetilde{B}$ 道路连通．最

后给出 $p_*\pi_1(\widetilde{B},\widetilde{b}_0)=G$ 的证明，其中 $\widetilde{b}_0=(c_{b_0})$. 设 $\alpha: I\to B$ 为以 b_0 为基点的闭路，α 有提升 $\overline{\alpha}: I\to\widetilde{B}$ 使 $\overline{\alpha}(0)=\widetilde{b}_0$, 且 $p\overline{\alpha}=\alpha$, 其中 $\overline{\alpha}(s)=(\alpha_s)$, 而 $\alpha_s: I\to B$ 为 $\alpha_s(t)=\alpha(\mathrm{st})$. 由推论 3.7, $[\alpha]\in p_*\pi_1(\widetilde{B},\widetilde{b}_0)$ 当且仅当 $\overline{\alpha}(1)=\overline{\alpha}(0)=\widetilde{b}_0$. 但 $\overline{\alpha}(1)=(\alpha),\overline{\alpha}(0)=(c_{b_0})$, 因此 $[\alpha]\in p_*\pi_1(\widetilde{B},\widetilde{b}_0)$ 当且仅当 $\alpha\sim c_{b_0}$. 由等价关系的定义，$\alpha\sim c_{b_0}$ 当且仅当 $[\alpha]=[\alpha * c_{b_0}^{-1}]\in G$, 因此 $p_*\pi_1(\widetilde{B},\widetilde{b}_0)=G$. 证毕.

以上我们得出了在一定条件下 B 上的覆盖映射可以用基本群 $\pi_1(B,b_0)$ 的某一子群 G 的共轭类来确定，显示出基本群的力量.

下面利用覆盖映射和基本群，部分的证明以下 Borsuk-Ulam 定理.

定理 3.17 不存在连续映射 $f: S^n\to S^{n-1}$, 使对任意 $x\in S^n$ 有 $f(-x)=-f(x), n\geq 1$.

证： $n=1$ 时的结论是显然的. 我们只证明 $n=2$ 的情形 ($n\geq 3$ 时的证明需用其他更加深入的知识). 反设存在映射 $f: S^2\to S^1$ 使对任意 $x\in S^2$ 有 $f(-x)=-f(x)$. 考虑到 3.3 中的覆盖映射 $p: S^2\to RP^2$ 和 $q: S^1\to RP^1$. 因为 $qf(-x)=qf(x)$, 因此由 p 是商映射，存在映射 $h: RP^2\to RP^1$ 使 $h[x]=[qf(x)], x\in S^2$. 注意到 $RP^1\cong S^1$, 因此 $\pi_1 RP^1\cong Z$, 而且已知 $\pi_1 RP^2\cong Z_2$, 因此 h 的导出同态 $h_*: \pi_1 RP^2\to\pi_1 RP^1$ 是零同态. 下面指出这是不可能的.

设 $x_0\in S^2$ 且 $b_0=qf(x_0)$ 为 RP^1 的基点. 设 α 是 S^2 中由 x_0 到 $-x_0$ 的道路，则 $qf\alpha$ 是 RP^1 中以 b_0 为基点的闭路. 我们证明 $[qf\alpha]\neq 0\in\pi_1(RP^1,b_0)$. 假设 $qf\alpha\simeq c_{b_0}$ rel 0,1, 则由推论 3.7, $f\alpha$ 同伦于 $f(x_0)$ 点上的常值闭路. 但 $f\alpha(1)=f(-y_0)=-f(y_0)$, 因此 $f\alpha$ 不是闭路，也就不可能同伦于一个闭路，导出矛盾，因此 $[qf\alpha]\neq 0$. 但另一方面有 $0=h_*[p\alpha]=[hp\alpha]=[qf\alpha]$, 这是一个矛盾，因此我们最初的假设不成立. 证毕.

推论 3.18 设 $g: S^2 \to R^2$ 为连续映射使对所有 $x \in S^2$ 有 $g(-x) = -g(x)$, 则存在 $x_0 \in S^2$ 使 $g(x_0) = 0$.

证: 不然的话, 由 $f(x) = g(x)/\|g(x)\|$ 定义的 $f: S^2 \to S^1$ 与定理 3.17 矛盾. 证毕.

推论 3.19 设 $h: S^2 \to R^2$ 为连续映射, 则至少存在一对对径点 $x, -x$ 使 $h(x) = h(-x)$.

证: 不然的话, 由 $g(x) = h(x) - h(-x)$ 定义的 $g: S^2 \to R^2$ 与推论 3.18 相矛盾. 证毕.

习 题

1. 映射 $f: X \to Y$ 叫做局部同胚, 如果对每个 $x \in X$ 存在 x 的开邻域 U 使 f 将 U 同胚的映到 $f(U)$. 证明: 若 E 局部道路连通, 则覆盖映射 $p: E \to B$ 局部同胚.

2. 单位圆周 $S^1 = \{z是复数 \mid |z| = 1\}$, 证明: $p: S^1 \to S^1, p(z) = z^n$ 是覆盖映射.

3. 设 $p: E \to B$ 为覆盖映射, 则 B 的所有可能的可许邻域组成的族是 B 的一个拓扑基.

4. 设 E_2 局部道路连通, 证明: 由覆盖映射 $p_1: E_1 \to B$ 到 $p_2: E_2 \to B$ 的同态 $h: E_1 \to E_2$ 也是覆盖映射.

5. 设 $p_1: E_1 \to B_1, p_2: E_2 \to B_2$ 为覆盖映射, 证明: $p_1 \times p_2: E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ 是覆盖映射.

6. 设 $n \geq 2$. 证明: 任意映射 $f: RP^n \to S^1$ 是零伦的.

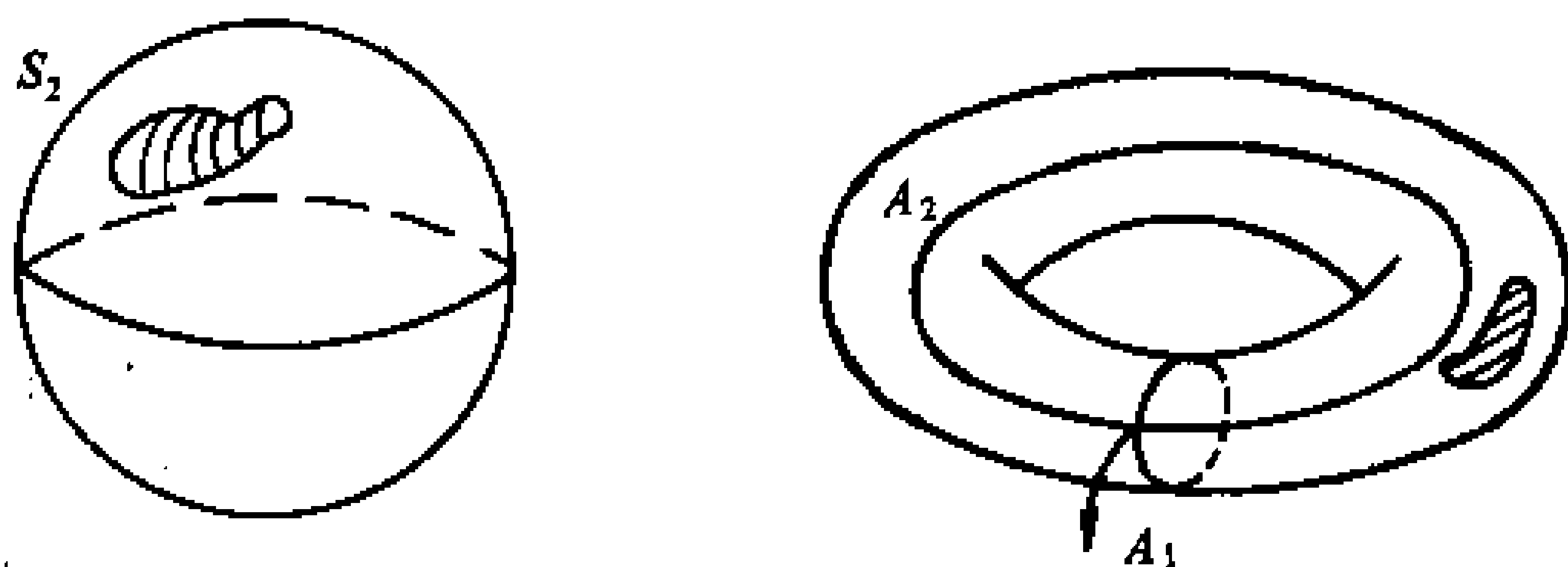
7. $p: E \to B$ 是覆盖映射使 E 道路连通, 局部道路连通, 而且 B 是单连通的, 则 p 是同胚.

第四章 同调群

在前一章，我们已讨论了基本群，并且看到它是很有力量的拓扑不变量，例如它足够解决覆盖映射的分类问题．但是 $|K|$ 的基本群只依赖于 K 的 2 维架，因此它甚至在区别 S^2 和 S^3 的伦型时都已不起作用．本章将涉及更进一步的拓扑不变量－－多面体 $|K|$ 的单纯同调群 $H_n(K)$ 和空间 X 的奇异同调群 $H_n(X)$．它们都是伦型不变量而且当 X 是多面体 $|K|$ 时，奇异同调群和单纯同调群在同构意义下是一致的．在研究同调群的基本性质的基础上我们将给出它的计算方法，然后给出它的一些应用，例如 Lefschetz 不动点定理等．最后，还将同调群由整系数推广到一般系数的情形．

§1 单纯同调群

利用基本群可以区别球面 S^2 和环面 $S^1\times S^1$ 伦型不相同．利用同调群来区别这两者的伦型的直观思路是这样的．球面 S^2 上的任一闭路 C 都是 S^2 上某一区域的边缘，我们称之为 有冠闭路．但是在 $S^1\times S^1$ 上



除了存在有冠闭路 B 等等以外，还存在无冠闭路 A_1 和 A_2，

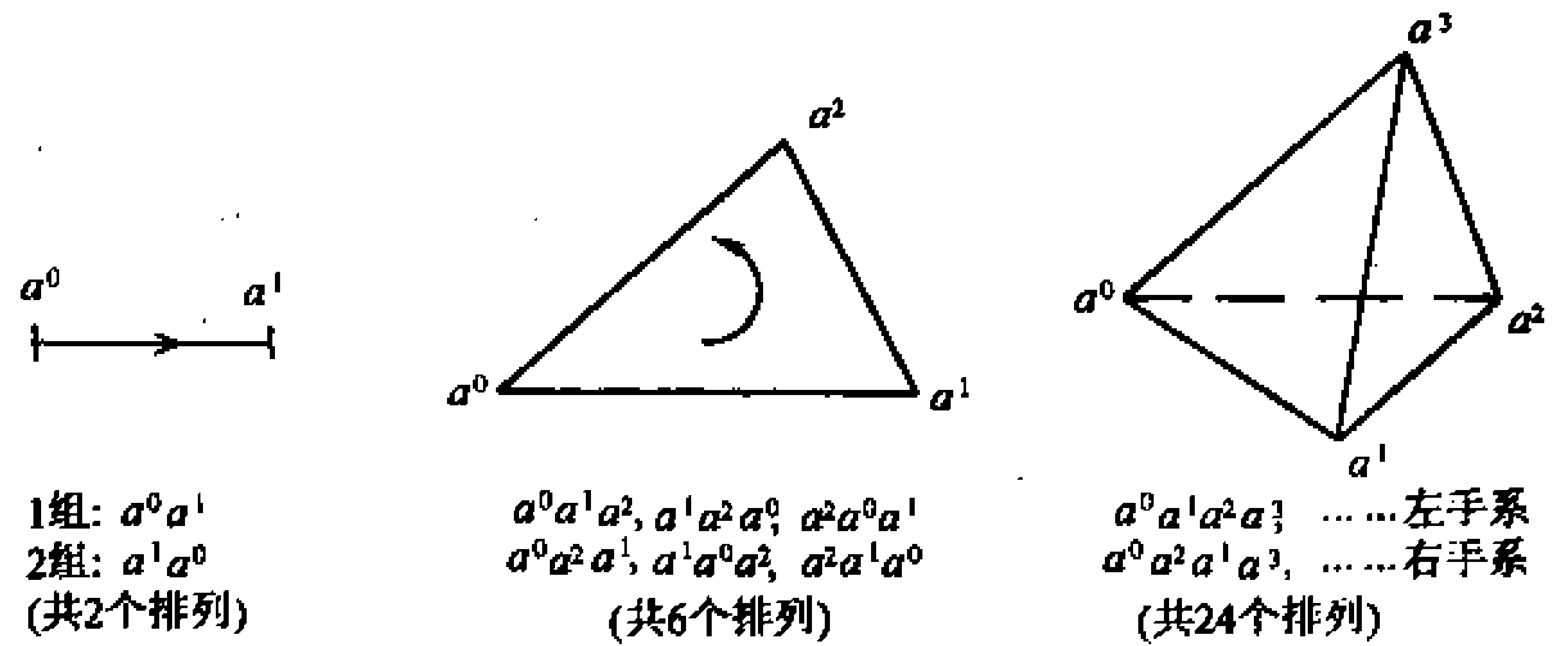
A_1 或 A_2 不再是环面上任一区域的边缘. 这就是 S^2 和 $S^1\times S^1$ 不同胚的原因所在.

在同调群中, 我们将用 1 维闭链 (实际上就是闭棱道) 来刻画闭路, 用 1 维闭链同调于 0 来刻画闭路是有冠的. 这种刻画方式自然可推广到 n 维闭链, $n\geq 1$.

现在我们开始精确的描述什么叫做 n 维闭链以及怎样才能使 n 维闭链同调于零. 首先对复形 K 的单形给出定向.

定义 1.1 n 维单形 σ 的 $n+1$ 个顶点 $a^0,a^1,\ldots,a^n$ 有 $(n+1)!$ 个排列. 将这些排列分成两组, 使同组任意两个排列相差偶数个对换. 而不同组的两个排列相差奇数个对换. 我们称这两组为 σ 的两个互为相反的 *定向*. 单形 σ 连同它的其中一个定向称为 *定向单形*. 定向单形 σ 记为 $a^0a^1\cdots a^n$.

当 $n=1,2,3$ 时, 单形的定向有明显的直观意义. 1 维单形的两个定向可用正反两个箭头来表示. 2 维单形的定向可用顶点排列是顺时针或逆时针来确定. 3 维单形的定向则是顶点排列是右手系或左手系. 如下图所示.



非定向单形的顶点排列是可以随意选择的, 但定向单形与顶点的排列有关. 当排列相差奇数个对换时, 单形具有相反的定向, 我们记为 $a^0a^1a^2\cdots a^n=-a^1a^0a^2\cdots a^n$.

定义 1.2 设 $\sigma=a^0a^1\cdots a^n$ 为定向单形, 显然有 $a^0a^1\cdots a^n=(-1)^ia^ia^0a^1\cdots\hat{a}^i\cdots a^n$. 我们称 $(-1)^ia^0a^1\cdots\hat{a}^i\cdots a^n$ 为

σ 的 (与 a^i 相对) 的 顺向面, 其中 $\cdots\hat{a}^i\cdots$ 表示将 a^i 去掉.

例如, $(-1)^0\hat{a}^0a^1a^2$ 是 $a^0a^1a^2$ 的顺向面, $(-1)^1a^0\hat{a}^1a^2$ 是 $a^0a^1a^2$ 的顺向面, $(-1)^2a^0a^1\hat{a}^2$ 是 $a^0a^1a^2$ 的顺向面.

定义 1.3 设 K 为单纯复形. K 的所有 q 维单形都取定了两个定向中的任一个, 仍记为 σ_i^q. K 所有 q 维定向单形 $\{\sigma_i^q\}_{1\leq i\leq r}$ 生成的自由交换群 $C_q(K)$ 称为 K 的 q 维链群.

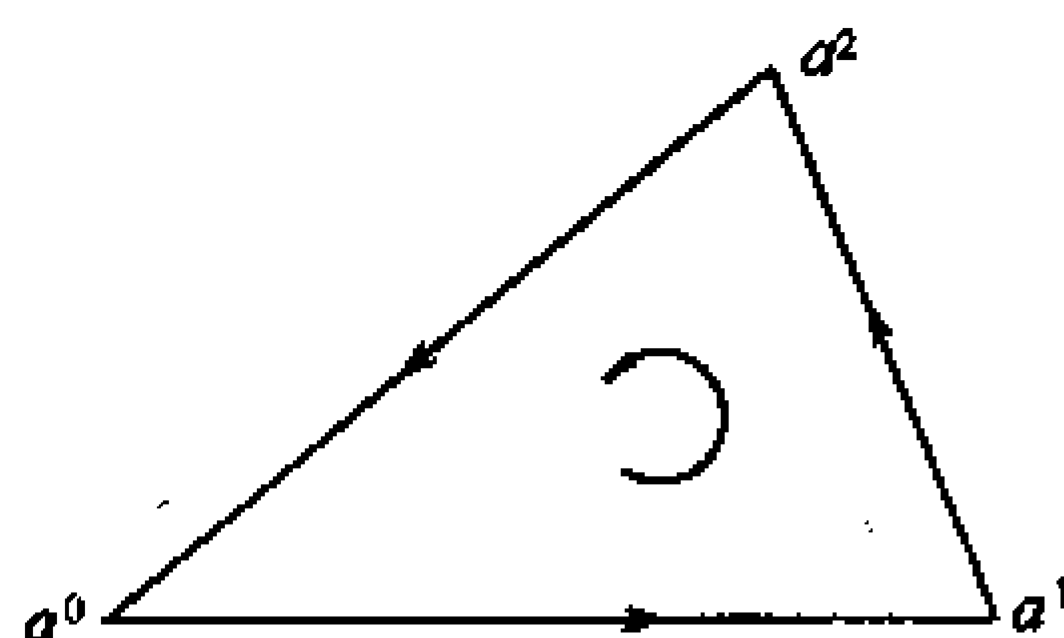
可见 $C_q(K)\cong Z\bigoplus Z\bigoplus Z\cdots\bigoplus Z$, 可以将它看作"向量空间", 是整数加群 Z 上的以 $\{\sigma_1^q,\sigma_2^q,\ldots,\sigma_r^q\}$ 为基的"向量空间". $C_q(K)$ 的每个元素称为 K 的 q 维链, 它必然是 $\sigma_1^q,\ldots,\sigma_r^q$ 的整系数线性组合 $c=m_1\sigma_1^q+\cdots+m_r\sigma_r^q$. 当系数 $m_1,m_2,\ldots,m^r$ 全为 0, 则 c 为 $C_q(K)$ 的零元. c 的负元就是 $(-c)=(-m_1)\sigma_1^q+\cdots+(-m_r)\sigma_r^q$.

定义 1.4 复形 K 的 q 维和 $q-1$ 维链群之间的 边缘同态

$$\partial_q: C_q(K)\to C_{q-1}(K)$$

定义为 $\partial_q(a^0a^1\cdots a^q)=\sum_{i=0}^q(-1)^ia^0\cdots\hat{a}^i\cdots a^q$, 其中 $a^0a^1\cdots a^q$ 为 K 的任一 q 维定向单形, 然后再按同态扩张. 规定 $\partial_0=0$.

$\partial_q(a^0a^1\cdots a^q)$ 叫做定向单形 $a^0a^1\cdots a^q$ 的 边缘链, 它是 $q-1$ 维链. 根据定义, 它是 $a^0a^1\cdots a^q$ 所有 $(q-1)$ 维顺向面的形式和. 例如 $\partial(a^0a^1a^2)=a^1a^2+(-1)a^0a^2+a^0a^1=a^0a^1+a^1a^2+a^2a^0$.



边缘同态 ∂_q 有以下重要的性质.

命题 1.5 合成 $C_q(K) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(K) \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{q-2}(K)$ 为 0，即 $\partial_{q-1}\partial_q = 0$ 是零同态.

证: 只要对 $C_q(K)$ 的每个基元, 即 q 维定向单形 $a^0a^1\cdots a^q$, 证明 $\partial_{q-1}\partial_q(a^0a^1\cdots a^q) = 0$. 不妨设 $q \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\partial_{q-1}\partial_q(a^0\cdots a^q) &= \partial_{q-1}\sum_{i=0}^{q}(-1)^i a^0\cdots\hat{a}^i\cdots a^q \\
&= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j a^0\cdots\hat{a}^j\cdots\hat{a}^i\cdots a^q + \\
&\quad \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sum_{j=i+1}^{q}(-1)^{j-1}a^0\cdots\hat{a}^i\cdots\hat{a}^j\cdots a^q \\
&= \sum_{i\neq j}(-1)^{i+j}a^0\cdots\hat{a}^j\cdots\hat{a}^i\cdots a^q + \\
&\quad \sum_{i\neq j}(-1)^{i+j-1}a^0\cdots\hat{a}^i\cdots\hat{a}^j\cdots a^q \\
&= 0
\end{aligned}$$

推论 1.6 $\partial_{q+1}C_{q+1}(K) \subset \partial_q^{-1}(0) \subset C_q(K)$ 都是 $C_q(K)$ 的子群.

定义 1.7 子群 $\partial_{q+1}C_{q+1} \stackrel{\text{记}}{=} B_q(K)$ 叫做 K 的 q 维边缘群.

子群 $\partial_q^{-1}(0) \stackrel{\text{记}}{=} Z_q(K)$ 叫做 K 的 q 维闭链群.

商群 $Z_q(K)/B_q(K)$ 叫做 K 的 q 维同调群.

$Z_q(K)$ 的每个元素 z(必定有 $\partial_q(z) = 0$) 叫做 q 维闭链, $B_q(K)$ 的每个元素 b(必有 $b = \partial_{q+1}c$, 某个 $c \in C_{q+1}(K)$) 叫做 q 维边缘链. 同调群 $H_q(K)$ 的每个元素 $[z]$ 叫做 q 维同调类, 它的代表 z 是一个 q 维闭链. $H_q(K)$ 的元素 $[z]$ 任意两个代表 z 和 z' 必有 $z - z' \in B_q(K)$, 即存在 $c \in C_{q+1}(K)$ 使 $z - z' = \partial_{q+1}c$, 这时称 z 同调于 z', 记作 $z \sim z'$. 显然若 $z \sim z'$ 则 $[z] = [z']$. 若 $z \sim 0$ 即 $z \in B_q(K)$, 则 $[z] = 0 \in H_q(K)$.

例 1.8 设 $\sigma = (a^0, a^1, a^2), K = K(\sigma), L = \dot{\sigma}$. 因此 L 是 K 的子复形, 从而 $C_q(L)$ 是 $C_q(K)$ 的子群. 设 $z = a^0a^1 +$

$a^1a^2+a^2a^0$. 则 $\partial_1 z = \partial(a^0a^1)+\partial(a^1a^2)+\partial(a^2a^0) = (a^1-a^0)+(a^2-a^1)+(a^0-a^2) = 0$ 从而 $z \in Z_1(L)$, 是 L 的 1 维闭链. 但是, 在 K 中有 $\partial(a^0a^1a^2) = a^0a^1+a^1a^2+a^2a^0 = z, z \in B_1(K)$. 因此闭链 z 在 K 中是边缘链, 但在 L 中不是边缘链.

根据同调群的定义, 容易得出以下命题.

命题 1.9 若复形 K 的维数是 n, 则 $H_q(K)$ 只依赖于 K 的 $q+1$ 维架, 而且 $H_q(K) = 0$当$q > n$或$q < 0$.

定理 1.10 若 $|K|$ 连通, 则 $H_0(K) \cong Z$.

证: 因为 $\partial_0 = 0$, 因此 $Z_0(K) = C_0(K)$. 作对应 $\theta: C_0(K) \to Z$

$$\theta(m_1a^1 + \cdots + m_ra^r) = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$$

显然 θ 是满同态, 从而有 $C_0(K)/\ker\theta \cong Z$.

下面只要证明 $B_0(K) = \ker\theta$. 对任意 $b \in B_0(K)$, 则存在 $n_1\sigma_1 + \cdots + n_t\sigma_t \in C_1(K)$ 使 $b = \partial(n_1\sigma_1 + \cdots + n_t\sigma_t)$, 从而有 $\theta(b) = n_1\theta(\partial\sigma_1) + \cdots + n_t\theta(\partial\sigma_t)$. 设 $\sigma_i = a^1a^2$, 则 $\partial\sigma_i = a^2 - a^1$. 因此 $\theta(b) = 0, b \in \ker\theta$.

反之, 任 $b = m_1a^1+\cdots+m_ra^r \in \ker\theta$, 则 $m_1+\cdots+m_r = 0$. 因为 $|K|$ 连通, a^i 和 a^1 有棱道 $a^ia^{j_0}\cdots a^{j_r}a^1$ 连接. 不妨设棱道的顶点没有重复的, 从而每相邻顶点都展成 K 的 1 维单形. 令 $c_i = a^ia^{j_0} + a^{j_0}a^{j_1} + \cdots + a^{j_r}a^1$, 则 $\partial c_i = a^1 - a^i$, 从而 $m_ia^i = m_ia^1 - \partial m_ic_i (i \geq 2)$. 因此

$$\begin{aligned} b &= (m_1a^1 + \cdots + m_ra^r) \\ &= (m_1 + \cdots + m_r)a^1 - \partial(m_2c_2 + \cdots + m_rc_r), b \in B_0(K). \end{aligned}$$

因此 $B_0(K) = \ker\theta$.

推论 1.11 若 $|K|$ 有 r 个连通分支, 则

$$H_0(K) \cong Z \oplus Z \cdots \oplus Z \quad (\text{共 } r \text{ 个加项}).$$

证: 设 $|K|$ 的道路连通分支为 $|K_1|, \ldots, |K_r|$. 显然 $C_q(K) \cong C_q(K_1) \oplus \cdots \oplus C_q(K_r)$. 根据边缘同态的定义

$\partial_q C_q(K_i) \subset C_{q-1}(K_i)$, 因此有

$$Z_q(K) \cong Z_q(K_1) \oplus \cdots \oplus Z_q(K_r)$$

$$B_q(K) \cong B_q(K_1) \oplus \cdots \oplus B_q(K_r)$$

再用群论定理可知 $H_q(K) \cong H_q(K_1) \oplus \cdots \oplus H_q(K_r)$.

直接利用同调群的定义, 可以计算出一些空间的同调群.

例 1.12 设 $\sigma = (a^0, a^1, a^2)$, $K = \dot{\sigma}$, 因此 K 是 S^1 的剖分. 可以计算出 $H_0(K) \cong Z, H_1(K) \cong Z, H_q(K) = 0(q > 1$或$q < 0)$.

证: 任 $z \in Z_1(K)$, 设 $z = m_1(a^0a^1)+m_2(a^1a^2)+m_3(a^2a^0)$. 因此 $0 = \partial z = m_1(a^1 - a^0) + m_2(a^2 - a^1) + m_3(a^0 - a^2) = (m_1-m_2)a^1+(m_3-m_1)a^0+(m_2-m_3)a^2$, 从而 $m_1-m_2 = m_2-m_3 = m_3-m_1 = 0, m_1 = m_2 = m_3$. 因此 $z = m(a^0a^1+a^1a^2+a^2a^0)$, 从而 $Z_1(K) \cong Z$, 以 $a^0a^1 + a^1a^2 + a^2a^0$ 为生成元. 因为 $C_2(K) = 0$, 则 $B_1(K) = 0$. 因此 $H_1(K) = Z_1(K) \cong Z$, 以 $a^0a^1 + a^1a^2 + a^2a^0$ 为生成元. 根据命题 1.9 和定理 1.10, $H_0(K) \cong Z, H_q(K) = 0$当$q > 1$或$q < 0$.

从以上例子中看出, $H_1(K) \cong Z$ 的生成元 $a^0a^1 + a^1a^2 + a^2a^0$ 可看作是闭棱道 $a^0a^1a^2a^0$, 或者在同胚意义下它是 S^1 绕一圈的闭路. 这个闭链 $a^0a^1 + a^1a^2 + a^2a^0$ 不同调于 0, 即它不是边缘链, 它表示 S^1 中这个闭路不是 S^1 的任何区域的边界, 从而是无冠闭路. 这是同调群中出现非零生成元的直观意义.

对更复杂一些的空间同调群的计算将在后面介绍.

习 题

1. 假定 K_1 和 K_2 是同一个多面体的两个剖分, 链群 $C_q(K_1)$ 和 $C_q(K_2)$ 是否同构? 什么情况下能够同构.

2. 剖分 Möbius 带使得中心圆周是一个子复形. 将边缘圆周和中心圆周上的 1 维单形定向, 分别得到 1 维闭链 z_1 与

z, 证明： $z_1 \sim 2z$或$z_1 \sim -2z$.

3. 对环面与射影平面的剖分，计算它们所有的定向 2 维单形之和的边缘，看看有何差别.

4. 设 K 为由一点组成的复形，证明：

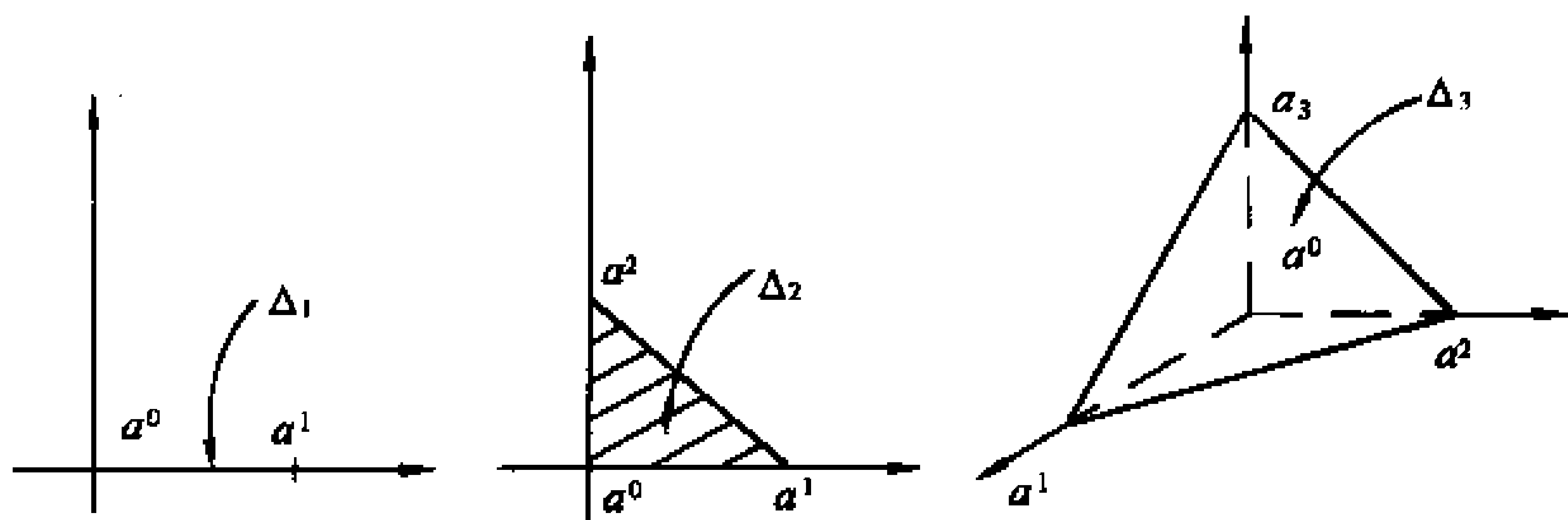
$$H_q(K) \cong \begin{cases} 0 & 当\ q \neq 0 \\ Z & 当\ q = 0 \end{cases}$$

§2 奇异同调群

本节的奇异同调群是对任意拓扑空间 X 定义的. 象在基本群中，它是以某个固定空间到 X 的所有映射的集合为基础的. 这个固定空间叫做标准单形 Δ_n, 我们由 Δ_n 的定义开始.

令 $a^i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ 为 R^m 中的点，其中 1 在第 i 个位置， $1 \leq i \leq m$. 再令 $a^0 = (0, \ldots, 0)$. 若 $m \geq n$, 则 $a^0, a^1, \ldots, a^n$ 在 R^m 中几何无关，从而可展成一个 n 维单形.

定义 2.1 对 $n \geq 0$, n 维标准单形Δ_n 就是单形 $(a^0, a^1, \ldots, a^n)$. 它是在欧氏空间 $R^{n+m} (m \geq 0)$ 中的单形.



定义 2.2 已给空间 X, X 的 n 维奇异单形 λ 是映射 $\lambda: \Delta_n \to X$.

X 的 1 维奇异单形恰好是 X 的道路. 可以用类似于基本群的方法，给出两个 n 维奇异单形的乘积 (当然要对奇异单形

作适当限制)，然后取它们的同伦类．这样定义出来的是 X 的 n 维同伦群 $\pi_n(X)$，是同伦论的主要研究对象.

为了定义同调群，我们采用类似于单纯同调的方法，将奇异单形看作生成元，让它们生成奇异链群．然后定义边缘同态，以便得出奇异的闭链群，边缘群和同调群.

定义 2.3 已给空间 X 和整数 n, X 的 n 维奇异链群 $S_n(X)$ 是由 {所有n维奇异单形$\lambda: \Delta_n \to X$} 生成的自由 Abel 群．（自然的，规定 $S_n(X)=0$当$n<0$).

一般情况下，X 的 n 维奇异单形有无限多个．但是 $S_n(X)$ 的每个元素 c 是有限个某些 n 维奇异单形的整系数线性组合 $c=m_1\lambda_1+\cdots+m_t\lambda_t$，我们称之为 n 维奇异链.

定义 2.4 对 $0\le r\le n$，第 r 个 面映射 $F^r: \Delta_{n-1}\to\Delta_n$ 是将顶点 $a^0, a^1, \ldots, a^{n-1}$ 分别映射顶点 $a^0, \ldots, \hat{a}^i, \ldots, a^n$ 的单纯映射.

定义 2.5 边缘同态 $\partial_n: S_n(X)\to S_{n-1}(X)$ 定义为

$$\partial_n(\lambda)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\lambda F^r$$

然后再按同态扩张，其中 λ 为任一 n 维奇异单形，而 $(-1)^r\lambda F^r$: $\Delta_{n-1}\to X$ 是 λ 的第 r 个顺向面（它是 $n-1$ 维奇异单形).

命题 2.6 合成 $S_n(X)\xrightarrow{\partial_n}S_{n-1}(X)\xrightarrow{\partial_{n-1}}S_{n-2}(X)$ 为 0.

证：不妨设 $n\ge 2$，并且只要对生成元 λ 证明即可.

$$\partial_{n-1}\partial_n(\lambda)=\partial[\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\lambda F^r]=\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\lambda F^rF^s.$$

但是容易验证， $F^rF^s=F^sF^{r-1}$当$s<r$ 时，因此

$$\partial\partial(\lambda)=\sum_{s<r}(-1)^{r+s}\lambda F^sF^{r-1}+\sum_{s\ge r}(-1)^{r+s}\lambda F^rF^s=0.$$

因为 λF^iF^j 出现两次，在 $\sum_{s<r}$ 中符号是 $(-1)^{i+j+1}$，在 $\sum_{s\ge r}$ 中符号是 $(-1)^{i+j}$.

类似于单纯同调群的定义，我们有

定义 2.7　$S_n(X)$ 的子群 $\partial_{n+1}S_{n+1}(X) \overset{\text{记}}{=} B_n(X)$ 叫做 X 的 n 维奇异边缘群. $S_n(X)$ 的子群 $\partial_n^{-1}(0) \overset{\text{记}}{=} Z_n(X)$ 叫做 X 的 n 维奇异闭链群. 商群 $Z_n(X)/B_n(X) \overset{\text{记}}{=} H_n(X)$ 叫做 X 的 n 维奇异同调群.

同样的，$Z_n(X)$ 的元素 z 叫做 n 维奇异闭链, $B_n(X)$ 的元素 b 叫做 n 维奇异边缘链.$H_n(X)$ 的元素 $[z]$ 叫做 n 维奇异同调类, 它的代表 z 是 n 维奇异闭链.

从单纯同调群和奇异同调群的定义可见, 能够定义同调群的关键是存在一系列链群 $S_n(X)$ 和一系列边缘同态 $\partial_n: S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ 使 $\partial_{n-1}\partial_n = 0$. 下面我们抛弃几何的内容，只保留 $\partial\partial = 0$ 这个实质性内容，推广而得以下链复形的概念，这是纯粹代数方面的概念.

定义 2.8　链复形 $C = \{C_n, \partial_n\}_{n\in Z}$ 是一系列 Abel 群 C_n 和一系列同态 $\partial_n: C_n \to C_{n-1}$ 使 $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.

定义 2.9　对如上的链复形 C, C_n 的子群 $\partial_n^{-1}(0) \overset{\text{记}}{=} Z_n(C)$ 叫做 C 的 n 维闭链群，$\partial_{n+1}C_{n+1} \overset{\text{记}}{=} B_n(C)$ 叫做 C 的 n 维边缘群. 商群 $Z_n(C)/B_n(C) \overset{\text{记}}{=} H_n(C)$ 叫做 C 的 n 维同调群.

例 2.10　(1) 设 K 为单纯单形，$C_n(K)$ 是 n 维单纯链群，则 $C(K) = \{C_n(K), \partial_n\}$ 是链复形，叫做单纯链复形.

(2) 对空间 $X, S(X) = \{S_n(X), \partial_n\}$ 叫奇异链复形.

例 2.11　约简奇异链复形 $\widetilde{S}(X) = \{\widetilde{S}_n(X), \widetilde{\partial}_n\}$ 定义为 $\widetilde{S}_n(X) = S_n(X)$当$n \neq -1$, 而 $\widetilde{S}_{-1}(X)$ 是单个生成元 $*$ 生成的 Abel 群. 同样的，$\widetilde{\partial}_n = \partial_n$当$n \neq 0, -1$ 而 $\widetilde{\partial}_0(\lambda) = *$ 对每一 0 维奇异单形 $\lambda, \widetilde{\partial}_{-1}(*) = 0$. 容易证明 $\widetilde{\partial}\widetilde{\partial} = 0$.

约简奇异链复形 $\widetilde{S}(X)$ 的同调群 $H_n(\widetilde{S}(X))$ 叫做约简奇异同调群, 简记为 $\widetilde{H}_n(X)$. 为什么称作约简, 可由以下例 2.14 中得到解释.

例 2.12　设 Y 为空间 X 的子空间. 相对奇异链复形 $S(X, Y) = \{S_n(X,Y), \overline{\partial}_n\}$. 可定义为 $S_n(X,Y) = S_n(X)/S_n(Y)$, 而 $\overline{\partial}_n$ 是原来的 ∂_n 所诱导的同态. 显然有 $\overline{\partial}\overline{\partial} = 0$.

$S(X,Y)$ 的同调群 $H_n(S(X,Y))$ 叫做 X 相对于 Y 的相对奇异同调群, 简记为 $H_n(X,Y)$.

例 2.13　设 P 为独点空间, 则 $H_0(P) \cong Z, H_n(P) = 0$, 当 $n \neq 0$.

证: 因为由 $\triangle_n$ 到 P 的映射只有一个可能, 即为常值映射 λ_n, 因此 $S_n(P) \cong Z$ 由 λ_n 生成. 另外

$$\partial\lambda_n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\lambda_n F^r = \lambda_{n-1} - \lambda_{n-1} + \lambda_{n-1} - \cdots$$

因此 $\partial: S_n(P) \to S_{n-1}(P)$ 当 n 偶数时为同构, 而当 n 为奇数时为 0. 这样, 当 n 为 ≥ 2 偶数时 $Z_n(P) = 0$, 从而 $H_n(P) = 0$. 当 n 为 ≥ 1 的奇数时, 我们有 $B_n(P) = Z_n(P) = S_n(P)$, 从而 $H_n(P) = 0$. 另一方面, $Z_0(P) \cong Z, B_0(P) = 0$, 故 $H_0(P) \cong Z$.

例 2.14　设 X 道路连通, 则 $H_0(X) \cong Z$ 而 $\widetilde{H}_0\,(X) = 0$.

证: X 的 0 维奇异单形可理解为 X 的一个点, 而 1 维奇异单形可理解为 X 上的一个道路. 因此有

$$Z_0(X) = S_0(X) = \text{由}X\text{的所有点生成的自由 Abel 群}$$

$$B_0(X) = \text{由}\{x - y \mid x, y\text{为}X\text{的点}\}\text{生成的自由 Abel 群}$$

从而 $H_0(X) \cong Z$, 是由陪集 $[x]$ 生成的, x 为 X 的任一点.

但是, 如果考虑约简同调群, 由于 $\widetilde{\partial}_0\,(x) = *$, 因此有 $\widetilde{Z}_0\,(X) =$ 由 $\{x - y \mid x, y$ 为 X 的点 $\}$ 生成的自由 Abel 群. 另外, $\widetilde{B}_0\,(X) = B_0(X) = \widetilde{Z}_0\,(X)$, 因此 $\widetilde{H}_0\,(X) = 0$. 这就是说, 对道路连通的 X, $\widetilde{H}_0\,(X)$ 和 $H_0(X)$ 相差一个 Z, 这是"约简"的含义所在.

为了得出映射 $f: X \to Y$ 能够导出同态 $f_*: H_n(X) \to H_n(Y)$, 下面我们先讨论链复形之间的链映射以及链映射之间的链同伦.

定义 2.15 已给链复形$C=\{C_n,\partial_n\}_{n\in Z}$, $D=\{D_n,\partial_n\}_{n\in Z}$. 链映射 $\theta: C\to D$ 是一系列同态 $\{\theta_n: C_n\to D_n\}$ 使得 $\theta\partial=\partial\theta$, 即对每个 n 下图可换

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\theta_n} & D_n \\ \downarrow{\partial_n} & & \downarrow{\partial_n} \\ C_{n-1} & \xrightarrow{\theta_{n-1}} & D_{n-1} \end{array}$$

如果对每个 n,θ_n 都是同构. 称 $\theta: C\to D$ 为 **链同构**. 显然若 $\phi: D\to E$ 为另一个链映射, 则合成 $\phi\theta$ 也是链映射.

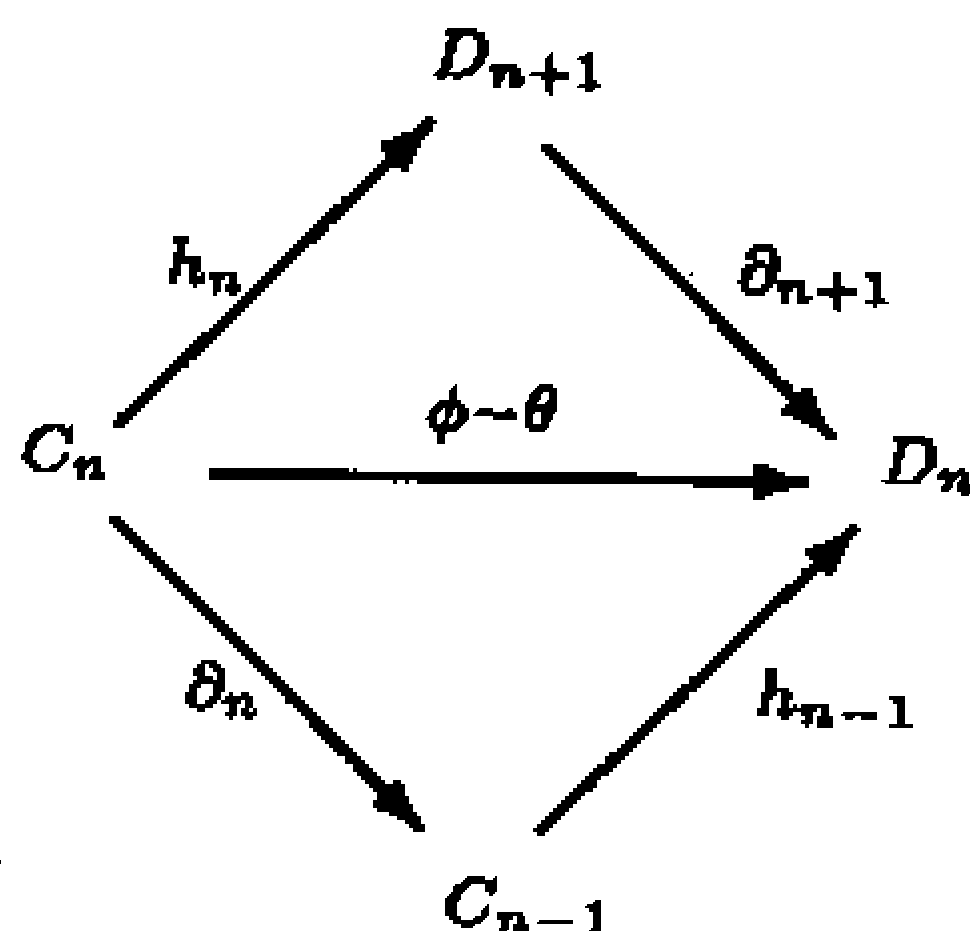
命题 2.16 链映射 $\theta: C\to D$ 导出同调群之间的同态, $\theta_*: H_n(C)\to H_n(D)$, 对每个 n, 使得 (1) 若 $1: C\to C$ 是恒等链同构, 则 1_* 也是恒等同态.

(2) 若 $\phi: D\to E$ 为另一链映射, 则 $(\phi\theta)_*=\phi_*\theta_*$.

(3) 若 θ 为链同构, 则 θ_* 是同构.

证: 因为 $\theta\partial=\partial\theta$, 因此对任 $c\in Z_n(C)$, $\partial(\theta(c))=\theta(\partial c)=0$, 即 $\theta(Z_n(C))\subset Z_n(D)$. 类似的 $\theta(B_n(C))\subset B_n(D)$. 由群论的定理, θ 导出商群之间的同态 $\theta_*: H_n(C)\to H_n(D)$ 使 $\theta_*[c]=[\theta(c)]$. 性质 (1)-(3) 很容易验证.

定义 2.17 两个链复形 C,D 之间的两个链映射 $\theta,\phi: C\to D$ 叫做 **链同伦的**, 若存在一系列同态 $\{h_n: C_n\to D_{n+1}\}_{n\in Z}$, 使得 $\phi_n(c)-\theta_n(c)=\partial h_n(c)+h_{n-1}\partial(c)$ 对任一 $c\in C_n$ 成立. 一系列同态 $h=\{h_n: C_n\to D_{n+1}\}$ 称为 θ 和 ϕ 之间的 **链同伦**. 记为 $\phi\overset{h}{\simeq}\theta$.



命题 2.18 若 $\phi \overset{h}{\simeq} \theta$, 则 $\phi_* = \theta_* : H_n(C) \to H_n(D)$.

证：任 $[z] \in H_n(C)$, 则 $z \in Z_n(C)$, 即 $\partial_n z = 0$. 再由 $\phi \overset{h}{\simeq} \theta$, 则 $\phi_n(z) - \theta_n(z) = \partial_{n+1}h_n(z) + h_{n-1}\partial_n(z) = \partial_{n+1}h_n(z)$, 因此

$$\phi_*[z] - \theta_*[z] = [\phi(z) - \theta(z)] = [\partial_{n+1}h_n(z)] = 0$$

已给空间偶之间的映射 $f:(X,Y) \to (A,B)$, 为了使 f 导出奇异同调群之间的同态 f_*, 必须要作出 f 所导出的链映射 $f_\#: S(X,Y) \to S(A,B)$.

命题 2.19 映射 $f:(X,Y) \to (A,B)$ 导出链映射

$$f_\#: S(X,Y) \to S(A,B)$$

使 (1) $1_\# = 1$

(2) 若 $g:(A,B) \to (C,D)$ 为另一映射, 则 $(gf)_\# = g_\# f_\#$.

证：令 $f_\#: S_n(X,Y) \to S_n(A,B)$ 为 $f_\#(\lambda) = f\lambda$, 其中 $\lambda: \Delta_n \to X$ 为 n 维奇异单形, 而 $f\lambda: \Delta_n \to A$. 容易验证 $\partial f_\# = f_\# \partial$ 而性质 (1)-(2) 也显然成立.

推论 2.20 映射 $f:(X,Y) \to (A,B)$ 导出同态 $f_*: H_n(X, Y) \to H_n(A,B)$ 和 $f_*: \widetilde{H}_n(X) \to \widetilde{H}_n(A)$ 使得

(1) $1_* = 1$.

(2) $(gf)_* = g_* f_*$.

下面将证明, 同伦的两个映射 f,g 导出链同伦的链映射 $f_\#, g_\#$, 从而导出的同调群同态 $f_* = g_*$. 由此还可以进而证明奇异同调群的伦型不变性.

为了证明的需要，先给出柱体 $|K|\times I$ 的一种剖分，其中 $|K|$ 为已知多面体. 这种剖分使上下底的剖分仍为 K.

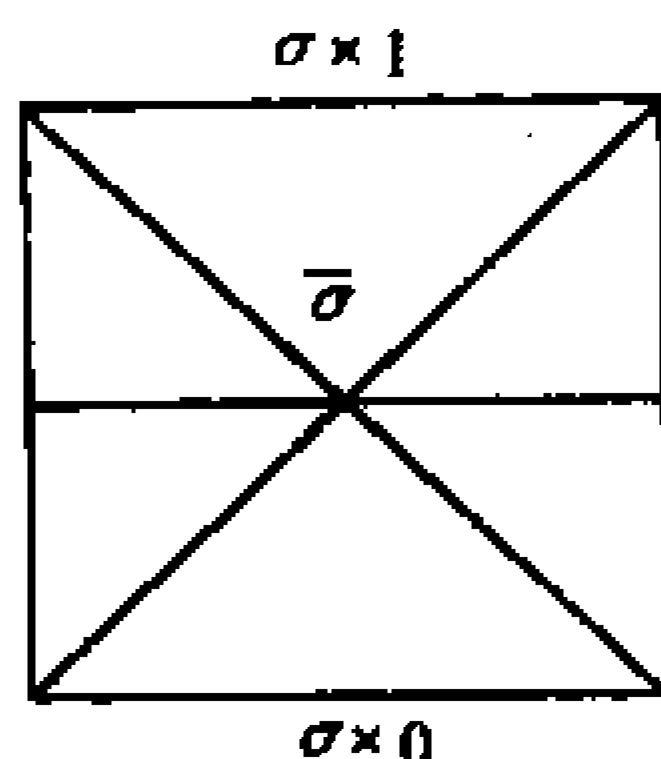
这种剖分是用归纳法定义的. 设对 K 的 $r-1$ 维架，$|K^{r-1}|\times I$ 已作出剖分，记为 $K^{r-1}\times I$. 对 K 的任一 r 维单形 σ, 边界复形 $\dot{\sigma}\subset K^{r-1}$, 因此 $|\dot{\sigma}|\times I$ 已作出剖分，从而 $\sigma\times I$ 的边界 $=\sigma\times 0\cup|\dot{\sigma}|\times I\cup\sigma\times 1$ 也已作出剖分，其中 $\sigma\times 0,\sigma\times 1$ 的剖分就是闭包复形 $K(\sigma\times 0),K(\sigma\times 1)$.

这时定义 $|K^r|\times I$ 的剖分为

$$K^r\times I=K^{r-1}\times I\cup\{\overline{\sigma}\tau\}\cup\{\overline{\sigma}\}$$

σ 取遍 K 的 r 维单形，τ 取遍 $\sigma\times I$ 边界的剖分中单形，$\overline{\sigma}$ 为点 $(\hat{\sigma},\frac{1}{2})$

如图所示是一维单形 σ 上的柱体 $\sigma\times I$ 的这种剖分.



引理 2.21　设 $i_0,i_1:X\to X\times I$ 为 $i_0(x)=(x,0),i_1(x)=(x,1)$. 存在链同伦 $h:S(X)\to S(X\times I)$ 使 $(i_1)_\#\overset{h}{\simeq}(i_0)_\#$.

证：设对所有 $r<n,h:S_r(X)\to S_{r+1}(X\times I)$ 对所有空间 X 已定义，使得 $(i_1)_\#-(i_0)_\#=\partial h+h\partial$ 成立. 下面只要对 n 维奇异单形 λ, 定义出 $h(\lambda)$ 使得 $(i_1)_\#(\lambda)-(i_0)_\#(\lambda)=\partial h(\lambda)+h\partial(\lambda)$ 成立.

先规定一些记号. 设标准单形 $\Delta_n=(a^0,a^1,\ldots,a^n)$. 令

$$c^r=(a^r,1),b^r=(a^r,0),a=(\hat{\Delta}_n,\frac{1}{2})$$

然后用 $(c^0, c^1, \ldots, c^n)$ 表示单纯映射 $\Delta_n \to \Delta_n \times I$ 使将 a^i 对应于 c^i, 如此等等, 这就是说 $(c^0, c^1, \ldots, c^n)$ 是 $\Delta_n \times I$ 的 n 维奇异单形, 即 $(c^0, c^1, \ldots, c^n) \in S_n(\Delta_n \times I)$. 再注意到对 n 维奇异单形 $\lambda: \Delta_n \to X$, 以下图形可换

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_n & \xrightarrow{\lambda} & X & \xrightarrow{i_1} & X \times I \\ & \searrow^{(c^0,\ldots,c^n)} & & \nearrow_{\lambda \times 1} & \\ & & \Delta_n \times I & & \end{array}$$

因此有 $(i_1)_\#(\lambda) = i_1\lambda = (\lambda \times 1)(c^0, \ldots, c^n) = (\lambda \times 1)_\#(c^0, \ldots, c^n)$. 同理 $(i_0)_\#(\lambda) = (\lambda \times 1)_\#(b^0, \ldots, b^n), \lambda = (\lambda)_\#(a^0, \ldots, a^n)$.

现在我们定义

$$h(\lambda) = (\lambda \times 1)_\#(a[(c^0, \ldots, c^n) - (b^0, \ldots, b^n) - h\partial(a^0, \ldots, a^n)])$$

其中 $a = (\hat{\Delta}_n, \frac{1}{2}), a(d^0, \ldots, d^r)$ 就是联合 $(a, d^1, \ldots, d^r)$. 这个定义是合理的, 因为 $\partial(a^0, \ldots, a^n)$ 是 $n-1$ 维奇异链, h 在其上已有定义. 因此有

$$\begin{aligned} \partial h(\lambda) &= (\lambda \times 1)_\#((c^0, \ldots, c^n) - (b^0, \ldots, b^n) - h\partial(a^0, \ldots, a^n)) \\ &\quad -(\lambda \times 1)_\#(a\partial[(c^0, \ldots, c^n) - (b^0, \ldots, b^n) - h\partial(a^0, \ldots, a^n)]) \\ &\quad (\text{因为易证}\, \partial a(d^0, \ldots, d^r) = (d^0, \ldots, d^r) - a\partial(d^0, \ldots, d^r)) \\ &= (\lambda \times 1)_\#((c^0, \ldots, c^n) - (b^0, \ldots, b^n) - h\partial(a^0, \ldots, a^n)) \\ &\quad (\text{由归纳假设, 后项为 } 0) \\ &= (i_1)_\#(\lambda) - (i_0)_\#(\lambda) - h\partial(\lambda)\, (\text{因为}(\lambda \times 1)_\# h = h\lambda_\#) \end{aligned}$$

这就完成了归纳法. 引理证毕.

定理 2.22 若 $f \simeq g: (X, Y) \to (A, B)$, 则 $f_* = g_*: H_n(X, Y) \to H_n(A, B)$.

证: 由 $f \simeq g$, 存在映射 $G: (X \times I, Y \times I) \to (A, B)$ 使得 $Gi_0 = f, Gi_1 = g, G$ 导出链映射 $G_\#: S(X \times I, Y \times I) \to$

$S(A,B)$. 因此

$$\partial G_{\#}h(\lambda)+G_{\#}h\partial(\lambda)=G_{\#}(\partial h(\lambda)+h\partial(\lambda))$$

$$=G_{\#}(i_1)_{\#}(\lambda)-G_{\#}(i_0)_{\#}(\lambda)$$

$$=f_{\#}(\lambda)-g_{\#}(\lambda)$$

这就是说, $f_{\#}\overset{G_{\#}h}{\simeq}g_{\#}$. 由命题 2.18 有 $f_*=g_*$.

推论 2.23 若 $(X,Y)\simeq(A,B)$, 则 $H_n(X,Y)\cong H_n(A,B)$ 而且 $\widetilde{H}_n(X)\cong\widetilde{H}_n(A)$, 对每个 $n\in Z$.

证: 存在映射 $f:(X,Y)\to(A,B)$ 和 $g:(A,B)\to(X,Y)$ 使得 $gf\simeq 1:(X,Y)\to(X,Y), fg\simeq 1:(A,B)\to(A,B)$. 因此有 $g_*f_*=1, f_*g_*=1$ 从而 $f_*:H_n(X,Y)\to H_n(A,B)$ 为同构.

由例 2.14, 我们已看出 0 维奇异同调群 $H_0(X)$ 的几何意义. 现在讨论 1 维同调群 $H_1(X)$ 和基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 的关系, 实际上 $H_1(X)$ 是 $\pi_1(X,x_0)$ 的交换化.

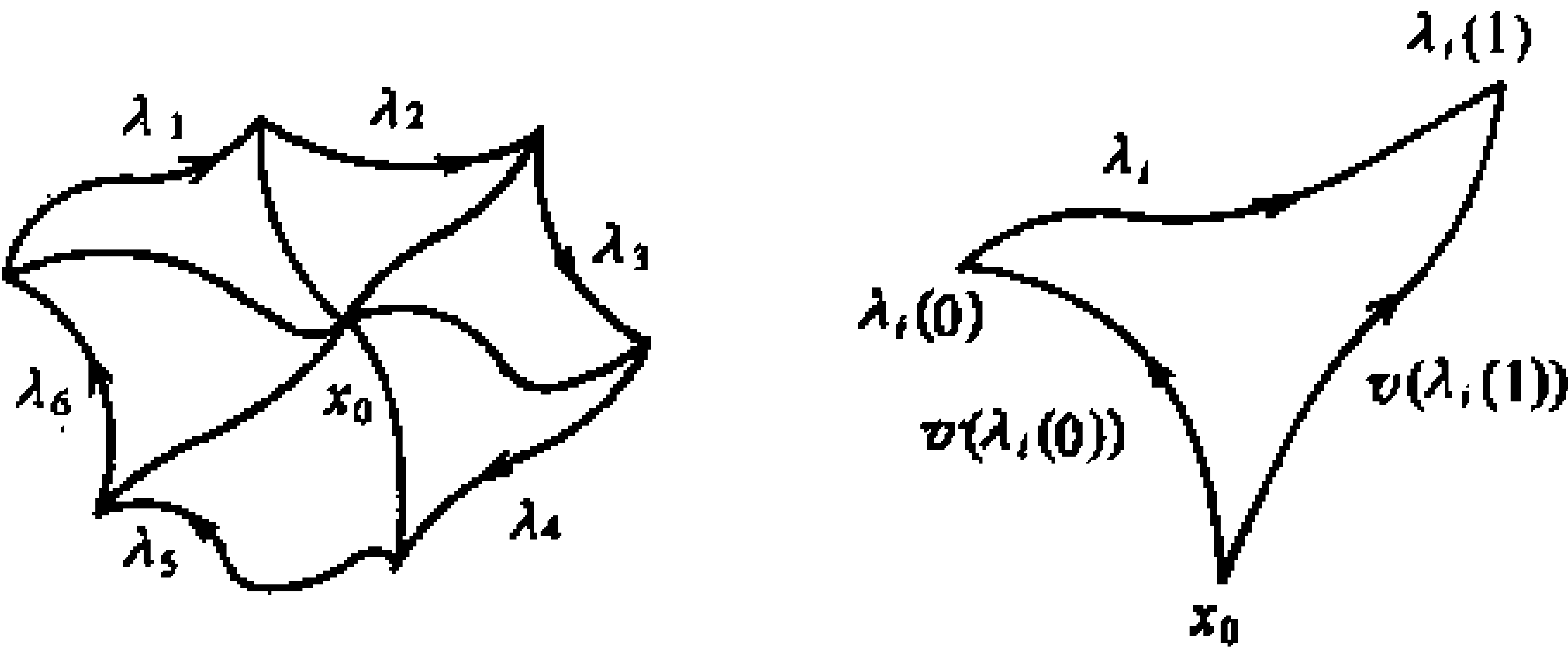
定理 2.24 设 X 道路连通, $x_0\in X$ 为基点, 则存在满同态 $\theta:\pi_1(X,x_0)\to H_1(X)$ 使 $\ker\theta$ 是 $\pi_1(X,x_0)$ 的换位子群, 因此 $H_1(X)\cong\pi_1(X,x_0)/[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]$ 是 $\pi_1(X,x_0)$ 的交换化.

证: 任意 $[u]\in\pi_1(X,x_0)$, 则 u 为 $I\to X$ 的映射使 $u(0)=u(1)=x_0$. 因为 I 同胚于标准单形 $\triangle_1$, 故不妨将 u 也看作 1 维奇异单形. 显然 $\partial u=u(1)-u(0)=0$, 因此 u 是一维奇异闭链, 即 $u\in Z_1(X)$. 令

$$\theta:\pi_1(X,x_0)\to H_1(X)\quad 为\ \theta[u]=\{u\}\in H_1(X)$$

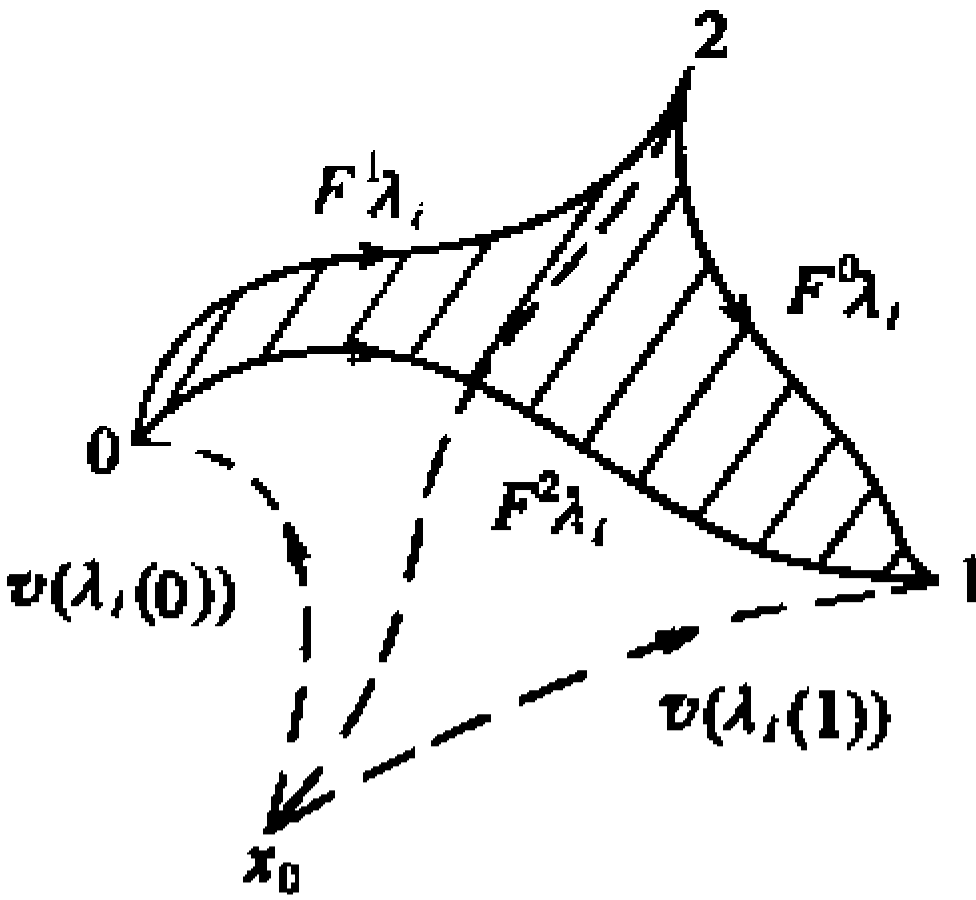
先证明 θ 满同态. 设 $\sum n_i\lambda_i\in Z_1(X)$, 其中 λ_i 为 1 维奇异单形, n_i 为整数. 对任 $x\in X$ 选定一个由 x_0 到 x 的道路 $v(x)$. 令 $u_i=v(\lambda_i(0))*\lambda_i*v(\lambda_i(1))^{-1}$, 其中 1 维奇异单形 λ_i 看作一个道路, u_i 是三个道路的乘积.

因为 $\partial(\sum n_i\lambda_i)=0$, 即 0 维链 $\sum n_i(\lambda_i(1)-\lambda_i(0))=0$. 因此将所有 λ_i 都看作道路的话，它们的乘积是一个闭路，如下图所示.



因此有闭链 $\sum n_iu_i\sim\sum n_i(v(\lambda_i(0)+\lambda_i-v(\lambda_i(1)))=\sum n_i\lambda_i$, 从而 $\theta[\prod u_i^{n_i}]=\{\sum n_i\lambda_i\},\theta$ 是满的.

因为 $H_1(X)$ 是 Abel 群，则 $[\pi_1(X),\pi_1(X)]\subset\ker\theta$, 从而 θ 导出同态 $\overline{\theta}\colon\pi_1(X)/[\pi_1(X),\pi_1(X)]\to H_1(X)$. 只要证明 $\overline{\theta}$ 是单的. 设 $\overline{\theta}[u]=0$, 因此 $u=\partial(\sum n_i\lambda_i)$, 其中 λ_i 为 2 维奇异单形，n_i 为整数. 这就是说 $u=\sum n_i(F^0\lambda_i-F^1\lambda_i+F^2\lambda_i)$. 但是，$u$ 是一个闭路，是一个 1 维奇异单形，因此 $u=F^r\lambda_{i_0}$, 某个 i_0 和 $0\leq r\leq 2$, 即 u 是 λ_{i_0} 的第 r 个面. 另外，右式中除 $F^r\lambda_{i_0}$ 这一项外，其他项必然相互抵消为 0.



对所有 λ_i 定义

$$
\begin{aligned}
a_i &= v(\lambda_i(0))*F^2\lambda_i*v(\lambda_i(1))^{-1}\\
b_i &= v(\lambda_i(1))*F^0\lambda_i*v(\lambda_i(2))^{-1}
\end{aligned}
$$

$$c_i = v(\lambda_i(2)) * (F^1\lambda_i)^{-1} * v(\lambda_i(0))^{-1}$$

并且定义道路 $u_i = a_i * b_i * c_i$. 因此

$$u_i \simeq v(\lambda_i(0)) * F^2\lambda_i * F^0\lambda_i * (F^1\lambda_i)^{-1} * v(\lambda_i(0))^{-1} \simeq c_{x_0} \text{ rel } 0,1.$$

令 $\omega = \prod u_i^{n_i}$, 则 $\omega \simeq c_{x_0}$ rel $0,1$. 但是经过交换化后 $[u] = [\omega] \in \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$, 这是因为交换化后

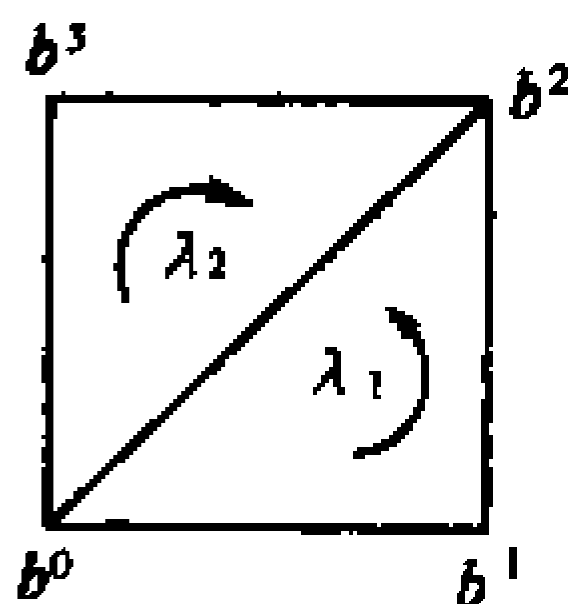
$$[\omega] = [\sum n_i u_i] = [\sum n_i(F^0\lambda_i - F^1\lambda_i + F^2\lambda_i)] = [u]$$

因此 $[u] = 0 \in \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$, $\overline{\theta}$ 是单的.

例 2.25 设 X 为 Klein 瓶, 由第三章例 2.25, $\pi_1(X) = G_p\{b_1, b_2; b_1b_2b_1^{-1}b_2\}$, 交换化后得 $H_1(X) \cong Z \oplus Z_2$.

习 题

1. 设正方形 $I \times I$ 的四个顶点为 b^0, b^1, b^2, b^3(如下图所示).



$\lambda_1 = (b^0, b^1, b^2), \lambda_2 = (b^0, b^3, b^2)$ 为 $I \times I$ 的线性的 2 维奇异单形. 计算 $\partial(\lambda_1 + \lambda_2)$ 和 $\partial(\lambda_1 - \lambda_2)$.

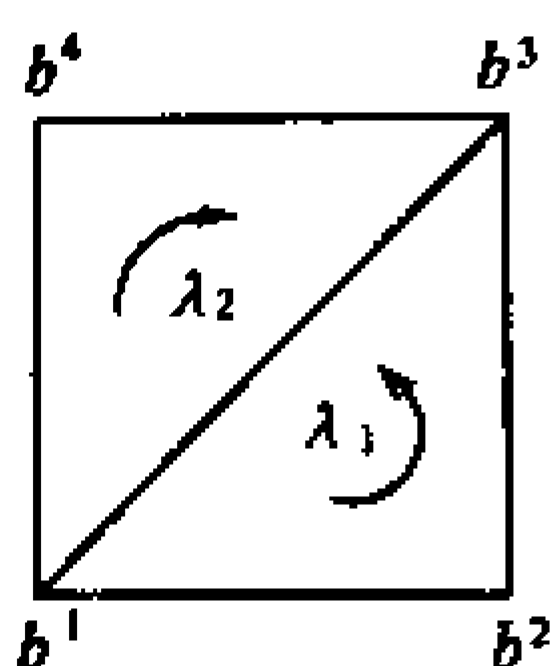
2. 设 $p: I \times I \to T, q: I \times I \to X$ 为正方形到环面和 Klein 瓶的商映射. 定义 2 维奇异单形

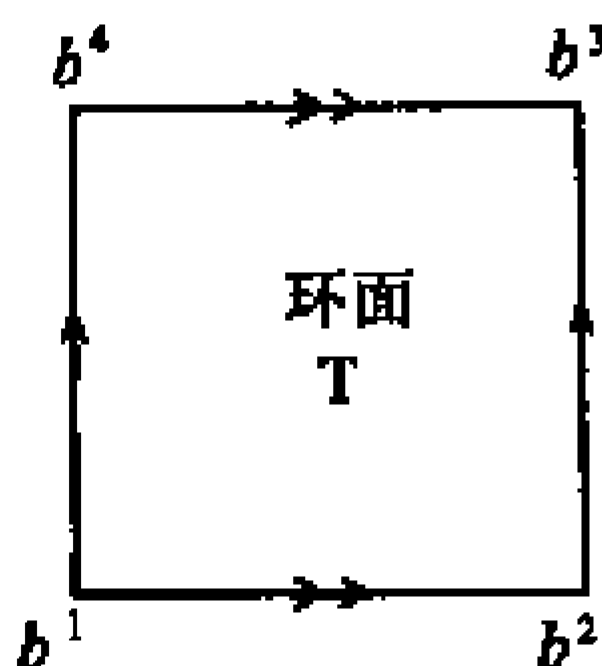
$$\lambda_2 = p \cdot (b^1, b^4, b^3), \quad \lambda_1 = p \cdot (b^1, b^2, b^3)$$

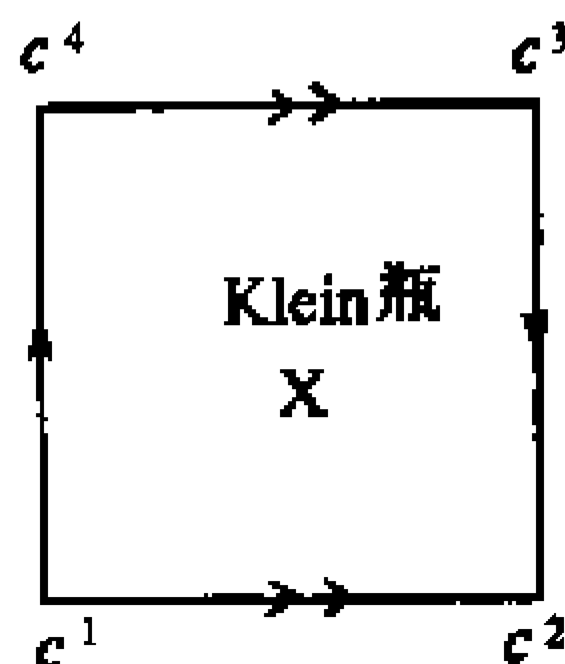
$$u_1 = q \cdot (c^1, c^4, c^3), \quad u_2 = q \cdot (c^1, c^3, c^2)$$

$$\omega = q(c^1, c^4) = q(c^3, c^2)$$

证明: $\partial(\lambda_1-\lambda_2)=0, \partial(u_1+u_2)=2\omega, \partial\omega=0$.







3. 定义内射 $i: X\to X\times Y$ 为 $i(x)=(x,y_0)$, 证明: i 导出单同态 $i_*: H_n(X)\to H_n(X\times Y), n\in Z$.

4. 证明: (a) 在链复形 C 到 D 的所有链映射中, 链同伦关系是等价关系.

(b) 链复形 C 和 D 叫做 链等价的, 如果存在链映射 $f: C\to D, g: D\to C$ 使 $gf\simeq 1_C, fg\simeq 1_D$, 这时 f 也叫做链等价. 证明: 链等价 f 导出同构 $f_*: H_n(C)\to H_n(D)$.

5. 证明: 定理 2.24 中的同态 $\theta: \pi_1(X,x_0)\to H_1(X)$ 满足

(a) 若 $f: (X,x_0)\to(Y,y_0)$ 为映射, 则 $f_*\theta=\theta f_*$.

(b) 若 $u: I\to X$ 为由 x_0 到 x_1 的道路, 则 $\theta u_\#=\theta$.

6. 计算下列空间的 0 维和 1 维奇异同调群: (包括约简)

(1) 球面 $S^n(n\geq 0)$.

(2) Möbius 带.

(3) 射影平面 RP^2.

§3 正合序列和切除定理

存在空间偶 (X,A) 的正合序列以及切除定理是同调群的基本性质. 这些基本性质将会帮助我们去计算某些空间的同调群, 并在许多几何问题中有重要作用. 本节将先从链复形偶的正合序列出发, 先作纯代数方面的讨论, 然后再得出奇异同调群的一些正合序列. 最后证明切除定理.

定义 3.1 (a) 一序列 Abel 群和同态 $G\xrightarrow{\phi}H\xrightarrow{\psi}K$ 叫做在 H 处 正合, 如果 $\mathrm{im}\,\phi=\ker\psi$.

(b) 一序列 Abel 群和同态

$$\cdots \longrightarrow G_{m+2} \xrightarrow{\phi_{m+2}} G_{m+1} \xrightarrow{\phi_{m+1}} G_m \xrightarrow{\phi_m} G_{m-1} \xrightarrow{\phi_{m-1}} G_{m-2} \longrightarrow \cdots$$

叫做 Abel 群的 正合序列，如果对每个 m，在 G_m 处正合.

(c) 一序列链复形和链映射

$$O \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow O$$

叫做 链复形的短正合序列，如果对每个 $n \in Z$

$$O \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \longrightarrow O$$

是 Abel 群的短正合序列.

如果已给链复形的短正合序列 $O \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow O$，则对每个 n 就导出一组同调群和同态如下

$$\text{相应于}n: H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E)$$

$$\text{相应于}n-1: H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(D) \xrightarrow{g_*} H_{n-1}(E)$$

为了将各组能联结在一起构成 Abel 群的长序列，我们准备定义 联结同态 $\partial_*: H_n(E) \to H_{n-1}(C)$(每个 $n \in Z$).

根据已给的链复形短正合序列 $O \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow O$ 我们有无穷的图形使每个方块可换且每行是 Abel 群正合序列

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
O & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n & \xrightarrow{g_n} & E_n & \longrightarrow & O \\
 & & \downarrow{\partial_n} & & \downarrow{\partial_n} & & \downarrow{\partial_n} & & \\
O & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & E_{n-1} & \longrightarrow & O \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

设 $z\in Z_n(E)$, 即 $z\in E_n$ 且 $\partial z=0$. 因为 g 满同态 (这是根据在 E_n 处正合而得), 存在 $d\in D_n$ 使 $g(d)=z$. 由 g 是链映射, $g(\partial d)=\partial g(d)=\partial z=0$. 再根据在 D_{n-1} 处正合, 存在 $c\in C_{n-1}$ 使 $f(c)=\partial d$. 注意到

$$f(\partial c)=\partial f(c)=\partial\partial d=0$$

而 f 是单同态 (这由在 C_{n-1} 处正合而得) 因此 $\partial c=0, c\in Z_{n-1}(C)$.

还要验证一下, 由 $H_n(E)$ 到 $H_{n-1}(C)$ 的对应 $[z]\mapsto[c]$ 是否唯一定义. 设 $z,z'\in Z_n(E)$ 是同调的闭链, 则存在 $e\in E_{n+1}$ 使 $z-z'=\partial_{n+1}e$. 设 $d,d'\in D_n$ 使 $g(d)=z, g(d')=z'$ 而 $c,c'\in C_{n-1}$ 使 $f(c)=\partial d, f(c')=\partial d'$. 我们必须证明 c 同调于 c'. 由 g 满, 存在 $a\in D_{n+1}$ 使 $g(a)=e$ 而且 $g(\partial a)=\partial g(a)=\partial e=z-z'$. 因此 $d-d'-\partial a\in\ker g=\operatorname{im}f$, 从而存在 $b\in C_n$ 使 $f(b)=d-d'-\partial a$. 这样便有

$$f(\partial b)=\partial f(b)=\partial(d-d'-\partial a)$$

$$=\partial d-\partial d'=f(c)-f(c')=f(c-c')$$

因为 f 单, 因此 $c-c'=\partial b, [c]=[c']$.

定义 3.2 如上所述而定义为 $\partial_*[z]=[c]$ 的同态 $\partial_*: H_n(E)\to H_{n-1}(C)$ 叫做短正合序列 $O\longrightarrow C\xrightarrow{f}D\xrightarrow{g}E\longrightarrow O$ 的联结同态.

定理 3.3 已给链复形短正合序列的可换图形

$$\begin{array}{ccccccccc}
O & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & O\\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
O & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \longrightarrow & O
\end{array}$$

存在长正合序列的可换图形如下,

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\longrightarrow H_n(C) & \xrightarrow{f_*} & H_n(D) & \xrightarrow{g_*} & H_n(E) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(C) & \xrightarrow{f_*} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_*} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & & \\
\cdots\longrightarrow H_n(C') & \xrightarrow{f'_*} & H_n(D') & \xrightarrow{g'_*} & H_n(E') & \xrightarrow{\partial'_*} & H_n(C') & \xrightarrow{f'_*} & \cdots
\end{array}$$

即使每个方块可换而且上下两行为长正合序列.

证: 在 $H_n(D)$ 处正合: $\mathrm{im}f_* = \mathrm{ker}g_*$. 因为 $gf = 0$, 因此 $g_*f_* = 0$ 从而 $\mathrm{im}f_* \subset \mathrm{ker}g_*$. 任 $[z] \in \mathrm{ker}g_*$, 则 $g_*[z] = 0$, 即存在 $e \in E_{n+1}$ 使 $g(z) = \partial e$. 但是 g 满, 存在 $d \in D_{n+1}$ 使 $g(d) = e$, 因此 $g(z) = \partial e = \partial g(d) = g(\partial d)$, 即 $g(z - \partial d) = 0$. 由正合性, 存在 $c \in C_n$ 使 $f(c) = z - \partial d$ 且易证 $c \in Z_n(C)$. 因此 $[z] = [z - \partial d] = [f(c)] = f_*[c] \in \mathrm{im}f_*$.

(b) 在 $H_n(E)$ 处正合: $\mathrm{im}g_* = \mathrm{ker}\partial_*$. 根据联结同态 ∂_* 的定义易知 $\partial_*g_* = 0$, 因此 $\mathrm{im}g_* \subset \mathrm{ker}\partial_*$. 若 $[z] \in \mathrm{ker}\partial_*$, 即 $\partial_*[z] = 0$. 由 ∂_* 定义, 存在 $d \in D_n, c \in C_{n-1}$ 使 $g(d) = z, f(c) = \partial d$. 而 $[c] = \partial_*[z] = 0$. 因此存在 $e \in C_n$ 使 $c = \partial e$, 从而 $\partial d = f(c) = f(\partial e)$. 因此 $[z] = [g(d)] = [g(d) - gf(e)] = g_*[d - f(e)] \in \mathrm{im}g_*$(注意到 $\partial(d - f(e)) = 0$).

(c) 在 $H_{n-1}(C)$ 处正合: $\mathrm{im}\partial_* = \mathrm{ker}f_*$. 易知 $f_*\partial_* = 0$, 因此 $\mathrm{im}\partial_* \subset \mathrm{ker}f_*$. 若 $[z] \in \mathrm{ker}f_*$, 即 $f_*[z] = 0$, 则存在 $d \in D_n$ 使 $f(z) = \partial d$, 从而 $\partial g(d) = g(\partial d) = gf(z) = 0$. 另一方面, $[g(d)] \in H_n(E)$ 满足 $\partial_*[g(d)] = [z] \in \mathrm{im}\,\partial_*$.

最后是关于方块的可换性. $\beta_*f_* = f'_*\alpha_*$ 和 $\gamma_*g_* = g'_*\beta_*$ 是显然的. 只要证明 $\alpha_*\partial_* = \partial'_*\gamma_*$. 若 $[g(d)] \in H_n(E)$, 则 $\partial_*[g(d)] = [c]$, 其中 $\partial(d) = f(c)$. 因此 $\alpha_*\partial_*[g(d)] = [\alpha(c)]$. 但是, $f'\alpha(c) = \beta f(c) = \beta\partial(d) = \partial\beta(d)$, 从而 $[\alpha(c)] = \partial'_*[g'\beta(d)] = \partial'_*[\gamma g(d)] = \partial'_*\gamma_*[g(d)]$.

下面关于空间偶 (X, Y) 的 同调正合序列 可以直接得出.

定理 3.4 已给空间偶 (X,Y)，令 $i:Y\to X$ 为内射，$j:S(X)\to S(X,Y)=S(X)/S(Y)$ 为商链映射，则存在正合序列

$$\cdots\longrightarrow H_n(Y)\xrightarrow{i_*}H_n(X)\xrightarrow{j_*}H_n(X,Y)\xrightarrow{\partial_*}H_{n-1}(X)\xrightarrow{i_*}\cdots$$

使得若 $f:(X,Y)\to(A,B)$ 为映射，则以下图形可换

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\longrightarrow & H_n(Y) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,Y) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(X) & \xrightarrow{i_*}\cdots \\
 & \downarrow{f_*} & & \downarrow{f_*} & & \downarrow{f_*} & & \downarrow{f_*} & \\
\cdots\longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(A) & \xrightarrow{j_*} & H_n(A,B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(B) & \xrightarrow{i_*}\cdots
\end{array}$$

证：因为 $0\longrightarrow S(Y)\xrightarrow{i_\#}S(X)\xrightarrow{j_\#}S(X,Y)\longrightarrow 0$ 是链复形的短正合序列，因此结论由定理 3.3 立即得出.

例 3.5 设 x 为 X 的任一点，在约简同调正合序列中

$$\cdots\longrightarrow\tilde{H}_n(x)\xrightarrow{i_*}\tilde{H}_n(X)\xrightarrow{j_*}H_n(X,x)\xrightarrow{\partial_*}\tilde{H}_{n-1}(x)\longrightarrow\cdots$$

$\tilde{H}_n(x)=0$(任 $n\in Z$), 因此 $\tilde{H}_n(X)\cong H_n(X,x)$.

定理 3.6 若空间 $X\supset Y\supset Z$, 称 (X,Y,Z) 为三重组. 设 $i:(Y,Z)\to(X,Z), j:(X,Z)\to(X,Y)$ 为内射，则存在正合序列

$$\cdots\longrightarrow H_n(Y,Z)\xrightarrow{i_*}H_n(X,Z)\xrightarrow{j_*}H_n(X,Y)\xrightarrow{\partial_*}H_{n-1}(Y,Z)\longrightarrow\cdots$$

称为三重组 (X,Y,Z) 的同调正合序列.

证：显然 $0\longrightarrow S(Y,Z)\xrightarrow{i_*}S(X,Z)\xrightarrow{j_*}S(X,Y)\longrightarrow 0$ 是链复形的短正合序列，结论由定理 3.3 立即得出.

下面我们将讨论另一个正合序列 Mayer–Vietories 正合序列. 我们需要一些预备知识，首先是关于重分链映射的定义及性质.

设 Y 和 Y' 是欧氏空间的凸集，映射 $f:Y\to Y'$ 叫做线性的，如果对任 $x,y\in Y$ 和 $0\le t\le 1$ 有 $f((1-t)x+ty)=$

$(1-t)f(x)+tf(y)$. 由此容易得出，若 $x_0,x_1,\ldots,x_p\in Y$ 而 $t_0,\ldots,t_p$ 为非负整数使 $\sum t_i=1$, 则 $f(\sum t_ix_i)=\sum t_if(x_i)$.

对凸集 Y, 定义 $A_n(Y)\subset S_n(Y)$ 为所有线性的 n 维奇异单形 $\phi\colon\Delta_n\to Y$ 所生成的子群. 因为 $\Delta_n=(a^0,a^1,\ldots,a^n)$ 并记 $x_i=\phi(a^i)$, 则可用 $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ 表示 ϕ. 显然

$$\partial_n(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(x_0,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n)\cdots\cdots\quad(*)$$

因此 $\partial_nA_n(Y)\subset A_{n-1}(Y)$ 而 $\{A_n(Y),\partial_n\}$ 是链复形.

现在归纳的定义链映射 $sd'\colon A_n(Y)\to A_n(Y)$ 如下. 当 $n=0$ 定义 sd' 为恒等. 设对 $n-1$ 时 sd' 已定义并令 $\phi=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ 为线性的 n 维奇异单形, $\hat{\phi}$ 表示点 $\frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1}$ 叫做 ϕ 的重心, 则定义

$$sd'(\phi)=\hat{\phi}(sd'(\partial\phi))$$

其中若$(y_0,y_1,\ldots,y_{n-1})$为线性的奇异单形, $\hat{\phi}(y_0,y_1,\ldots,y_{n-1})=(\hat{\phi},y_0,\ldots,y_{n-1})$ 也是线性的奇异单形.

命题 3.7 $sd'\colon A(Y)\to A(Y)$ 为链映射, 即 $\partial sd'=sd'\partial$.

证: 根据上面的公式 $(*)$, 容易说明

$$\begin{aligned}\partial\hat{\phi}(y_0,\ldots,y_{n-1}) &= \partial(\hat{\phi},y_0,\ldots,y_{n-1})\\ &= (y_0,\ldots,y_{n-1})-\hat{\phi}\partial(y_0,\ldots,y_{n-1}),\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\partial sd'(x_0,\ldots,x_n) &= \partial\hat{\phi}(sd'\partial(x_0,\ldots,x_n))\\ &= sd'\partial(x_0,\ldots,x_n)-\hat{\phi}(\partial sd'\partial(x_0,\ldots,x_n)),\end{aligned}$$

而其中第二项根据归纳假设变成 $\hat{\phi}(sd'\partial\partial(x_0,\ldots,x_n))=0$. 因此 $\partial sd'=sd'\partial$.

下面归纳的定义一序列同态 $T'\colon A_n(Y)\to A_{n+1}(Y)$ 使得 $sd'-1=\partial T'+T'\partial$, 即 $sd'\simeq 1\colon A(Y)\to A(Y)$.

因为当 $n=0$ 时 sd' 为恒等，因此定义 $T'=0$. 设在 $<n$ 时 T' 已经定义并且令 ϕ 是 n 维线性的奇异单形，这时

$$\begin{aligned}\partial(sd'\phi-\phi-T'\partial\phi) &= \partial sd'\phi-\partial\phi-\partial T'\partial\phi \\ &= \partial sd'\phi-\partial\phi-(sd'-1-T'\partial)\partial\phi \\ &\quad (\text{由归纳假设}) \\ &= 0 \quad (\text{由}\partial sd'=sd'\partial\text{及}\partial\partial=0),\end{aligned}$$

因此定义 $T'(\phi)=\hat{\phi}(sd'\phi-\phi-T'\partial\phi)$, 这样

$$\begin{aligned}\partial T'(\phi) &= (sd'\phi-\phi-T'\partial\phi)-\hat{\phi}\partial(sd'\phi-\phi-T'\partial\phi) \\ &= sd'\phi-\phi-T'\partial\phi,\end{aligned}$$

从而有 $\partial T'+T'\partial=sd'-1$, 完成了归纳法.

定义 3.8 重分链映射 $sd: S(X)\to S(X)$ 定义如下. 设 $\psi:\Delta_n\to X$ 为 n 维奇异单形, 则 ψ 导出链映射 $\psi_{\#}: S_n(\Delta_n)\to S_n(X)$. 设 $\tau_n:\Delta_n\to\Delta_n$ 表示恒等映射，则 $\tau_n\in A_n(\Delta_n)\subset S_n(\Delta_n)$ 而 $\psi_{\#}(\tau_n)=\psi$, 定义

$$sd(\psi)=sd\psi_{\#}(\tau_n)=\psi_{\#}sd'(\tau_n).$$

命题 3.9 $sd\simeq 1: S(X)\to S(X)$, 即存在链同伦 $T: S_n(X)\to S_{n+1}(X)$ 使 $\partial T+T\partial=sd-1$.

证：对 $\psi\in S_n(X)$, 令 $T(\psi)=T\psi_{\#}(\tau_n)=\psi_{\#}T'(\tau_n)$. 则由等式 $sd'-1=\partial T'+T'\partial$ 结论立即得出.

现在可以证明以下定理，它将在建立 Mayer–Vietories 正合序列和证明同调切除定理中起重要作用.

定理 3.10 设 $\mathcal{U}$ 为 X 的一族子集使 $\mathrm{Int}\mathcal{U}$ 是 X 的开覆盖. $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ 是 $S_n(X)$ 的子群，它由所有使得 $\phi(\Delta_n)\subset U$ 某个 $U\in\mathcal{U}$ 的 n 维奇异单形 $\phi:\Delta_n\to X$ 所生成. 令 $i: S_n^{\mathcal{U}}(X)\to S_n(X)$ 为内射链映射，则 i 导出同构

$$i_*: H_n(S^{\mathcal{U}}(X))\to H_n(S(X)),\qquad \text{每个}n\in Z.$$

证：我们将构造链映射 $\Phi: S_n(X) \to S_n^{\mathcal{U}}(X)$ 使 $\Phi i = 1$ 而 $i\Phi$ 链同伦于 1. 这样由 §2 习题 4(b), i 是链等价，从而 i 导出同构 $i_*: H_n(S^{\mathcal{U}}(X)) \to H_n(S(X))$.

设 $\phi: \Delta_n \to X$ 为 X 的 n 维奇异单形，$\mathcal{V} = \{\phi^{-1}(\mathring{\mathrm{U}}) \mid \mathrm{U} \in \mathcal{U}\}$ 为 Δ_n 的子集族. 因为 Int$\mathcal{U}$ 是 X 的开覆盖，因此 $\mathcal{V}$ 是 Δ_n 的开覆盖. 因为 Δ_n 紧，存在 Lebesgue 数 $\delta > 0$, 使得对 Δ_n 的任一子集 $C, \mathrm{diam}(C) < \delta$, 必有 $C \subset \phi^{-1}(\mathring{U})$, 某个 $U \in \mathcal{U}$, 因此 $\phi(C) \subset U$.

设 K 表示 Δ_n 的闭包复形 $K(\Delta_n)$. 由第二章命题 3.15, 存在正整数 m, 使 mesh $K^{(m)} < \delta$. 根据定义 3.8

$$sd^m(\phi) = \phi_{\#}(sd')^m(\tau_n)$$

而 $(sd')^m(\tau_n)$ 将是 $K^{(m)}$ 中各单形所表示的 Δ_n 的线性奇异单形的和，因此 $sd^m(\phi) \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$. 对 n 维奇异单形 ϕ, 取 $m(\phi)$ 为最小正整数使 $sd^{m(\phi)}(\phi) \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$. 显然对 $0 \leq i \leq m$ 有 $m(\phi) \geq m(\partial_i\phi)$, 其中 $\partial_i\phi$ 表示 ϕ 的第 i 个面.

定义 $\Phi: S_n(X) \to S_n^{\mathcal{U}}(X)$ 为

$$\Phi(\phi) = sd^{m(\phi)}(\phi) - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i T(sd^{m(\partial_i\phi)} + \cdots + sd^{m(\phi)-1})\partial_i\phi$$

当 $\phi \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$, 则 $m(\phi) = 0$ 从而 $\Phi(\phi) = \phi, \Phi i = 1$. 下面一起证明 Φ 是链映射并且 $i\Phi \simeq 1: S(X) \to S(X)$.

注意到 $\partial T + T\partial = sd - 1$, 因此对正整数 k 有

$$\partial T sd^{k-1} + T sd^{k-1}\partial = sd^k - sd^{k-1}$$

取 $k = 1, 2, \ldots, k$, 则得出一序列等式，将这一序列等式相加得

$$\partial T(1 + \cdots + sd^{k-1}) + T(1 + \cdots + sd^{k-1})\partial = sd^k - 1$$

因此我们定义 $H: S_n(X) \to S_{n+1}(X)$ 为

$$H(\phi) = T(1 + sd + \cdots + sd^{m(\phi)-1})\phi$$

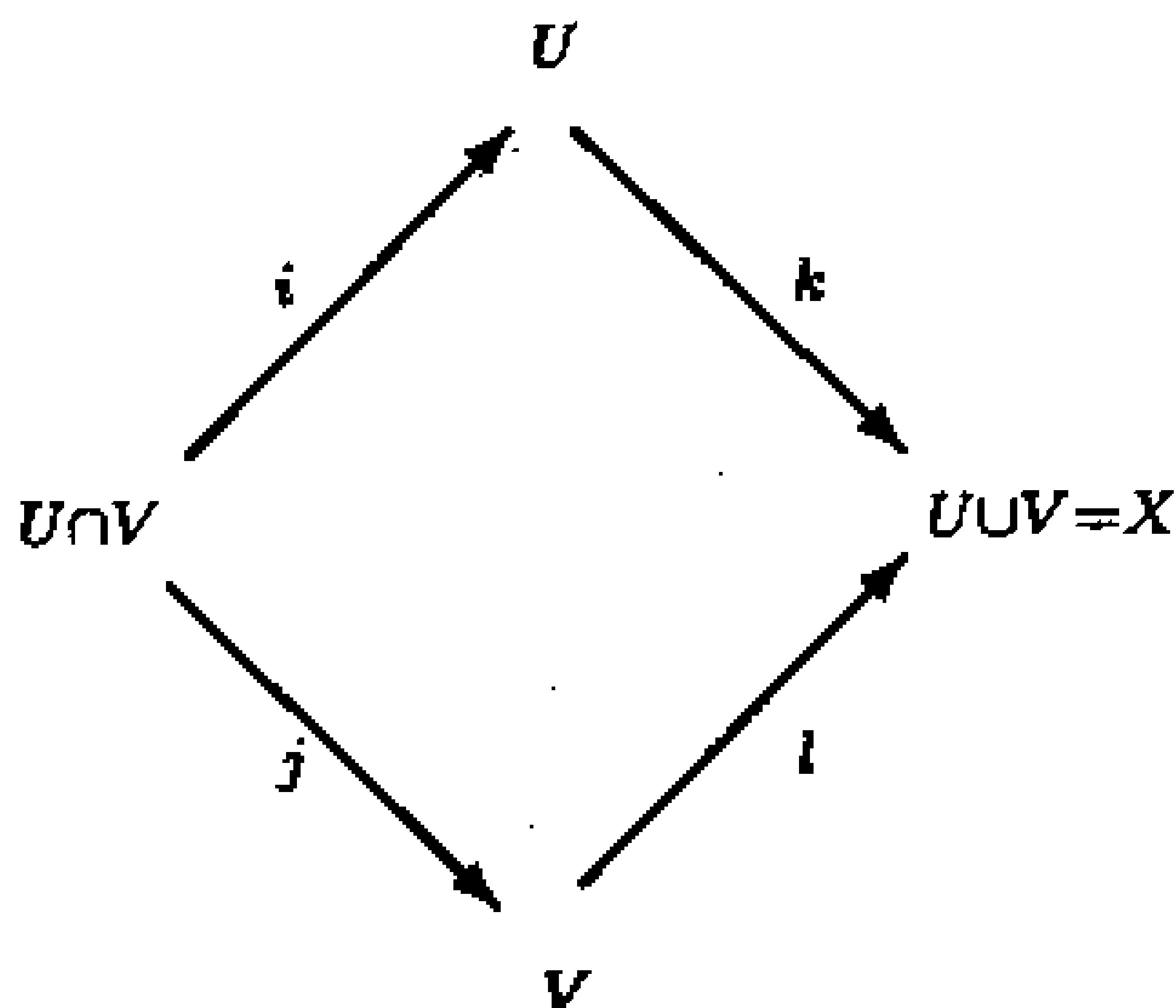
这样就有

$$\begin{aligned}
(\partial H + H\partial)\phi &= \sum(-1)^i \partial_i T(1 + \cdots + sd^{m(\phi)-1})\phi \\
&\quad + \sum(-1)^i T(1 + \cdots + sd^{m(\partial_i\phi)-1})\partial_i\phi \\
&= sd^{m(\phi)}\phi - \phi - T(1 + \cdots + sd^{m(\phi)-1})\partial_i\phi \\
&\quad + \sum(-1)^i T(1 + \cdots + sd^{m(\partial_i\phi)-1})\partial_i\phi \\
&= sd^{m(\phi)}\phi - \phi - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i T(sd^{m(\partial_i\phi)} + \cdots \\
&\quad + sd^{m(\phi)-1})\partial_i\phi \\
&= i\Phi(\phi) - \phi
\end{aligned}$$

因此 $\partial H + H\partial = i\Phi - 1$, 由此可容易得出 Φ 是链映射而且 $i\Phi \simeq 1: S(X) \to S(X)$. 证毕.

利用定理 3.10, 可以建立 Mayer–Vietories 正合序列.

设 U, V 为空间 X 的子集使 $\mathring{U} \cup \mathring{V} = X$. 令 X 的子集族 $\mathcal{U} = \{U, V\}$, 并且以下图形中的映射都是内射



引理 3.11 对于如上的空间 X, 存在链复形短正合序列

$$0 \to S_n(U \cap V) \xrightarrow{g_\#} S_n(U) \oplus S_n(V) \xrightarrow{h_\#} S_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

其中 $g_\#(c) = (i_\#(c), -j_\#(c)), h_\#(d_1, d_2) = k_\#(d_1) + l_\#(d_2)$.

证: 由定理 3.10 中 $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ 的定义及 $\mathcal{U} = \{U, V\}$, 容易看出 $h_\#$ 满. 另外 $g_\#$ 单是显然的, 只要证明 $\mathrm{im} g_\# = \ker h_\#$.

因为 $h_\# g_\#(c) = h_\#(i_\#(c), -j_\#(c)) = k_\# i_\#(c) - l_\# j_\#(c) = 0$, 因此 $\mathrm{im} g_\# \subset \ker h_\#$. 若 $(d_1, d_2) \in \ker h_\#$, 即 $k_\#(d_1) + l_\#(d_2) = 0$. 设 $d_1 = \sum n_i \lambda_i', d_2 = \sum m_j \lambda_j''$, 其中 λ_i', λ_j'' 为奇异单形而 n_i, m_j 为整数. 因此有 (作为 X 的奇异链)

$$\sum n_i \lambda_i' + \sum m_j \lambda_j'' = 0$$

因为 $S_n(X)$ 是自由 Abel 群, 只能发生的是对每个非零的 n_i, 有某个 j 使 $\lambda_i' = \lambda_j''$ 而且 $n_i = -m_j$. 非零的系数 m_j 也将以同样的形式出现. 这导出 $d_1, d_2 \in S_n(U \cap V)$ 而且 $d_1 = -d_2$, 因此 $(d_1, d_2) = (d_1, -d_1) = g_\#(d_1) \in \mathrm{im} g_\#$.

定理 3.12 设 U, V 为空间 X 的子集使 $\mathring{U} \cup \mathring{V} = X$, 则存在正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

其中 $g_*(x) = (i_*(x), -j_*(x)), h_*(y, z) = k_*(y) + l_*(z)$.

证: 利用引理 3.11 和定理 3.3 得出同调群的正合序列, 再用定理 3.10 就变成所求的正合序列.

如果 X' 是另一空间使 $X' = \mathring{U}' \cup \mathring{V}'$, $f: X \to X'$ 为映射使 $f(U) \subset U', f(V) \subset V'$, 则容易得出以下正合序列的可换图.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H_n(U \cap V) & \xrightarrow{g_*} & H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{h_*} & H_n(X) & \xrightarrow{\Delta} & H_n(U \cap V) \\
& \downarrow f_* & & \downarrow f_* \oplus f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
\cdots \longrightarrow & H_n(U' \cap V') & \xrightarrow{g_*'} & H_n(U') \oplus H_n(V') & \xrightarrow{h_*'} & H_n(X') & \xrightarrow{\Delta} & H_n(U' \cap V')
\end{array}$$

利用定理 3.10 可以证明以下同调群的重要性质 — 切除定理.

定理 3.13(切除定理) 设 (X,A) 为空间偶, U 为 A 的子集使闭包 $\overline{U}\subset\mathring{A}$, 则内射 $i:(X\backslash U,A\backslash U)\to(X,A)$ 导出同构

$$i_*:H_n(X\backslash U,A\backslash U)\to H_n(X,A)\qquad 每个 n\in Z.$$

证: 设 $\mathcal{U}=\{X\backslash U,\mathring{A}\}$, 这显然是 X 的覆盖且它的内部覆盖 X. 另外设 $\mathcal{U}'=\{A\backslash U,\mathring{A}\}$, 这是 A 的覆盖且它的内部覆盖 A. 由定理 3.10, 内射链映射

$$i:S_n^{\mathcal{U}}(X)\to S_n(X),\quad i':S_n^{\mathcal{U}'}(A)\to S_n(A)$$

导出同调群的同构. 将 $S_n^{\mathcal{U}'}(A)$ 看作 $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ 的链子复形, 则有自然链映射 $j:S_n^{\mathcal{U}}(X)/S_n^{\mathcal{U}'}(A)\to S_n(X)/S_n(A)=S_n(X,A)$. 显然有以下链复形短正合序列的可换图形

$$\begin{array}{ccccccccc}
O & \to & S_n^{\mathcal{U}'}(A) & \to & S_n^{\mathcal{U}}(X) & \to & S_n^{\mathcal{U}}(X)/S_n^{\mathcal{U}'}(A) & \to & O\\
 & & \downarrow{\scriptstyle i'_\#} & & \downarrow{\scriptstyle i_\#} & & \downarrow{\scriptstyle j_\#} & & \\
O & \to & S_n(A) & \to & S_n(X) & \to & S_n(X)/S_n(A) & \to & O
\end{array}$$

由定理 3.3, 产生出长正合序列的可换图形

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \to & H_n(S^{\mathcal{U}'}(A)) & \to & H_n(S^{\mathcal{U}}(X)) & \to & H_n(S^{\mathcal{U}}(X)/S^{\mathcal{U}'}(A)) & \to & \cdots\\
 & & \downarrow{\scriptstyle i'_*} & & \downarrow{\scriptstyle i_*} & & \downarrow{\scriptstyle j_*} & & \\
\cdots & \to & H_n(A) & \to & H_n(X) & \to & H_n(X,A) & \to & \cdots
\end{array}$$

因为 i'_*,i_* 都是同构, 根据五项引理 (见本节习题 2), j_* 为同构.

现在 $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ 可写成两个子群的和

$$S_n^{\mathcal{U}}(X) = S_n(X \backslash U) + S_n(\mathring{A})$$

但这不一定是直和. 类似的

$$S_n^{\mathcal{U}'}(X) = S_n(A \backslash U) + S_n(\mathring{A})$$

因此有 $S_n^{\mathcal{U}}(X)/S_n^{\mathcal{U}'}(A) = S_n(X \backslash U)/S_n(A \backslash U)$, 从而链映射 j 导出的同构 j_* 就是我们所需要的

$$H_n(X \backslash U, A \backslash U) \cong H_n(X, A), \qquad n \in Z.$$

注 3.14 切除同构的成立是有条件的. 这个条件有时改写为: 若 A, B 是空间 X 的子集使 $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$, 则内射 i 导出同构 $i_*: H_n(B, A \cap B) \to H_n(X, A), n \in Z$.

利用切除定理将很容易证明以下双角锥同构定理.

定理 3.15 对每个 n, 存在同构 $s_*: \widetilde{H}(X) \to \widetilde{H}_{n+1}(SX)$ 使对映射 $f: X \to Y$ 有 $s_* f_* = (Sf)_* s_*$, 其中 SX 为 X 的双角锥 (见第一章 §8 习题 10), $(Sf)[x, t] = [f(x), t]$.

证: 令 s_* 为以下合成, 即 $s_* = j_*^{-1} i_* \partial_*^{-1}$

$$\widetilde{H}_n(X) \xleftarrow{\partial_*} H_{n+1}(C_+X, X) \xrightarrow{i_*} H_{n+1}(SX, C_-X) \xleftarrow{j_*} \widetilde{H}_{n+1}(SX)$$

在这里 C_+X, C_-X 是 SX 对应于 $X \times [\frac{1}{2}, 1], X \times [0, \frac{1}{2}]$ 的子空间. ∂_* 是空间偶 (C_+X, X) 的同调正合序列的联结同态, j_* 是 (SX, C_-X) 同调正合序列中的内射同态. 因为 C_+X, C_-X 可缩, 由正合序列可知 ∂_*, j_* 为同构, 因此有它们的逆同态 ∂_*^{-1} 和 j_*^{-1}.

剩下的只要证明 i_* 为同构. 不幸的是, 这不是直接的是切除同构, 需要作略微的修改. 令 $\overline{C}X$ 为 SX 的对应于 $X \times [\frac{1}{4}, 1]$ 的子空间, 则有以下可换图形

$$
\begin{array}{ccc}
H_{n+1}(\overline{C}X, X\times[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]) & \xrightarrow{(i_2)_*} & H_{n+1}(SX, C_-X) \\
& \nwarrow_{(i_1)_*} \quad \nearrow_{i_*} & \\
& H_{n+1}(C_+X, X) &
\end{array}
$$

其中 i_1, i_2 都是内射，容易看出，定理 3.13 可直接推出 $(i_2)_*$ 是切除同构. 另一方面 $i_1: (C_+X, X) \to (\overline{C}X, X\times[\frac{1}{4},\frac{1}{2}])$ 是同伦等价，因此 $(i_1)_*$ 也是同构，从而得出 i_* 为同构.

等式 $s_*f_* = (Sf)_*s_*$ 的推导是容易的.

作为本节的结尾下面举几个计算奇异同调群的例子，都是利用正合同调序列计算的. 可见，正合序列和切除定理对于某些空间的奇异同调群的计算是有用的.

例 3.16　$H_0(S^1)\cong Z$, $H_1(S^1)\cong Z$, $H_n(S^1)=0, (n\neq 0,1)$.

证：令 $X=S^1$, z 和 z' 分别是 S^1 的北极和南极，$U=S^1\backslash z, V=S^1\backslash z'$. 因此 $\overset{\circ}{U}\cup\overset{\circ}{V}=X$, 存在 $M-V$ 正合序列

$$H_1(U)\oplus H_1(V)\xrightarrow{h_*}H_1(S^1)\xrightarrow{\Delta}H_0(U\cap V)\xrightarrow{g_*}H_0(U)\oplus H_0(V)$$

因为 U 和 V 可缩，第一项为 0, 因此 Δ 为单同态从而 $H_1(S^1)$ 同构于 $\mathrm{im}\Delta=\ker g_*$. 任 $mx+ny\in H_0(U\cap V)\cong Z\oplus Z$, 若 $g_*(mx+ny)=0$, 则 $i_*(mx+ny)=j_*(mx+ny)=0$, 从而 $m=-n$, 即 $mx+ny=m(x-y)$. 这就是说，$\ker g_*$ 是由 $x-y$ 生成的自由 Abel 群，从而 $H_1(S^1)\cong\ker g_*\cong Z$.

对 $n>1$, 考虑以下 $M-V$ 序列的一段

$$H_n(U)\oplus H_n(V)\xrightarrow{h_*}H_n(S^1)\xrightarrow{\Delta}H_{n-1}(U\cap V)$$

因为 U, V 可缩，第一项为 0. 因为 $U\cap V$ 同伦等价于二点空间，因此 $H_{n-1}(U\cap V)=0(n>1)$, 从而 $H_n(S^1)=0\,(n>1)$.

例 3.17

$$\widetilde{H}_r(S^n)\cong H_{r+1}(E^{n+1}, S^n)=\begin{cases} Z & 当r=n \\ 0 & 当r\neq n\end{cases}$$

证：取 z, z' 为 S^n 的北极和南极，令 $U = S^n \backslash z, V = S^n - z'$. 根据球极投影（见第一章例 4.7）可知 $U \cong R^n \cong V$，而且 $U \cap V = S^n \backslash \{z, z'\} \cong R^n \backslash \{原点\}$，易知 S^{n-1} 是它的形变收缩核，从而 $U \cap V \simeq S^{n-1}$.$M-V$ 序列的一段就变成

$$\begin{aligned} \tilde{H}_r(R^n) \oplus \tilde{H}_r(R^n) &\xrightarrow{h_*} \tilde{H}_r(S^n) \xrightarrow{\Delta} \tilde{H}_{r-1}(S^{n-1}) \\ &\xrightarrow{g_*} \tilde{H}_{r-1}(R^n) \oplus \tilde{H}_{r-1}(R^n) \end{aligned}$$

第一项和最后一项为 0，因此 $\Delta: \tilde{H}_r(S^n) \cong \tilde{H}_{r-1}(S^{n-1})$. 因此 $\tilde{H}_r(S^n) \cong \tilde{H}_{r-n+1}(S^1)$，从而 $\tilde{H}_r(S^n) = 0$，当 $n \neq r$，$\tilde{H}_n(S^n) \cong Z$.

利用空间偶 (E^{n+1}, S^n) 的同调正合序列

$$\tilde{H}_{r+1}(E^{n+1}) \xrightarrow{j_*} H_{r+1}(E^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_r(S^n) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_r(E^{n+1})$$

马上得出 $\partial_*: H_{r+1}(E^{n+1}, S^n) \cong \tilde{H}_r(S^n)$.

习　题

1. 设 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 是 Abel 群的短正合序列，证明以下论断彼此等价：

(a) 存在同态 $\bar{f}: B \to A$ 使 $\bar{f}f =$ 恒等.

(b) 存在同态 $\bar{g}: C \to B$ 使 $g\bar{g} =$ 恒等. 在每个情况有 $B \cong A \oplus C$，这时称正合序列是 可裂的.

2.(五项引理) 设以下是 Abel 群和同态的图形使得每行都是正合序列而且每个方块可换. 证明：若 f_1, f_2, f_4, f_5 为同构，则 f_3 也是同构.

$$\begin{array}{ccccccccc} C_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & C_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & C_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & C_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & C_5 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ D_1 & \xrightarrow{\beta_1} & D_2 & \xrightarrow{\beta_2} & D_3 & \xrightarrow{\beta_3} & D_4 & \xrightarrow{\beta_4} & D_5 \end{array}$$

3. 对任意空间偶 (X,A), 证明: (a) $i_*: H_q(A) \cong H_q(X)$ 对任 $q \in Z \iff H_q(X,A) = 0$ 任 $q \in Z$.

(b) $H_q(X,A) = 0$ 当 $q \le n \iff i_*: H_q(A) \to H_q(X)$ 当 $q < n$ 同构, 而当 $q = n$ 是满同态.

4. 设 (X,A,B) 为空间三重组, A 是 X 的收缩核, 则 $H_q(X,B) \cong H_q(X,A) \oplus H_q(A,B)$, 任 $q \in Z$.

5. 设 $i: A \to X$ 为内射, X 可形变到 A, 即存在同伦 $F: X \times I \to X$ 使 $F(x,0) = x, F(x,1) \in A$(任 $x \in X$), 则有可裂的短正合序列

$$O \longrightarrow H_{q+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \longrightarrow O$$

而且 $H_q(A) \cong H_{q+1}(X,A) \oplus H_q(X)$, 任 $q \in Z$.

6. 设 $p: I^2 \to T$ 为正方形到环面的商映射, 则 $A = p(\dot{I}^2) = S^1 \vee S^1$ 并证明:

$$H_n(T,A) \cong H_n(I^2, \dot{I}^2), n \in Z$$

然后进一步计算出 $H_n(T), n \in Z$.

7. 设 M 为 n 维流形, $x \in M$. 证明:

$$H_q(M, M-x) = \begin{cases} Z & q = n \\ 0 & q \ne n \end{cases}$$

8. 设 $i: A \to X$ 为内射, $X \cup_i CA$ 为不相交并集 $X \cup CA$ 在等价关系 $a \sim [a,0]$ 之下的商空间, 证明:

$$H_n(X,A) \cong \widetilde{H}_n(X \cup_i CA), \qquad n \in Z.$$

§4 单纯和奇异同调的一致性

在 §1 我们介绍单纯复形 K 的同调群. §2 至 §3 中, 我们介绍了空间 X 的奇异同调群, 并且证明了它的伦型不变性

及其他许多性质. 我们将在本节证明, 当 X 是多面体 $|K|$, 则奇异同调群 $H_n(X)$ 和单纯同调群 $H_n(K)$ 同构 $(n\in Z)$. 这说明了, 对多面体来讲两种同调群是一致的. 然后通过引进多面体的块形剖分, 介绍多面体的同调群的一般计算方法.

设 K 为单纯复形, $|K|$ 为其多面体. 我们要证明奇异同调群 $H_n(|K|)$ 和单纯同调群 $H_n(K)$ 同构 $(n\in Z)$.

设 $\sigma_1^q,\ldots,\sigma_k^q$ 为 K 的所有 q 维定向单形, §1 中已提到 q 维单纯链群 $C_q(K)$ 是 $\{\sigma_1^q,\ldots,\sigma_k^q\}$ 生成的自由 Abel 群. 因为单形定向的选择是任意的, 因此以下将每个单形的顶点排列唯一的确定为有序单形的形式, 即将 K 所有顶点排序, 然后 K 的每个单形 σ 规定为有序单形. (见第三章定义 2.10). 令 $l\colon C_r(K)\to S_r(|K^q|,|K^{q-1}|)$ 为以下合成 $(r\le q)$

$$C_r(K)\xrightarrow{l'} S_r(|K^q|)\to S_r(|K^q|)/S_r(|K^{q-1}|)$$

其中 K^q 为 K 的 q 维架, l' 将 K 的有序单形 $(a^0,a^1,\ldots,a^r)$ 映成线性奇异单形 $(a^0,a^1,\ldots,a^r)$. 显然在 $S_r(|K^q|,|K^{q-1}|)$ 中线性奇异单形 $l(a^0,a^1,\ldots,a^r)$ 是闭链, 它的同调类记为 $[l(a^0,\ldots,a^r)]\in H_r(|K^q|,|K^{q-1}|)$. 因此 l 导出同态

$$\bar{l}\colon C_r(K)\to H_r(|K^q|,|K^{q-1}|)$$

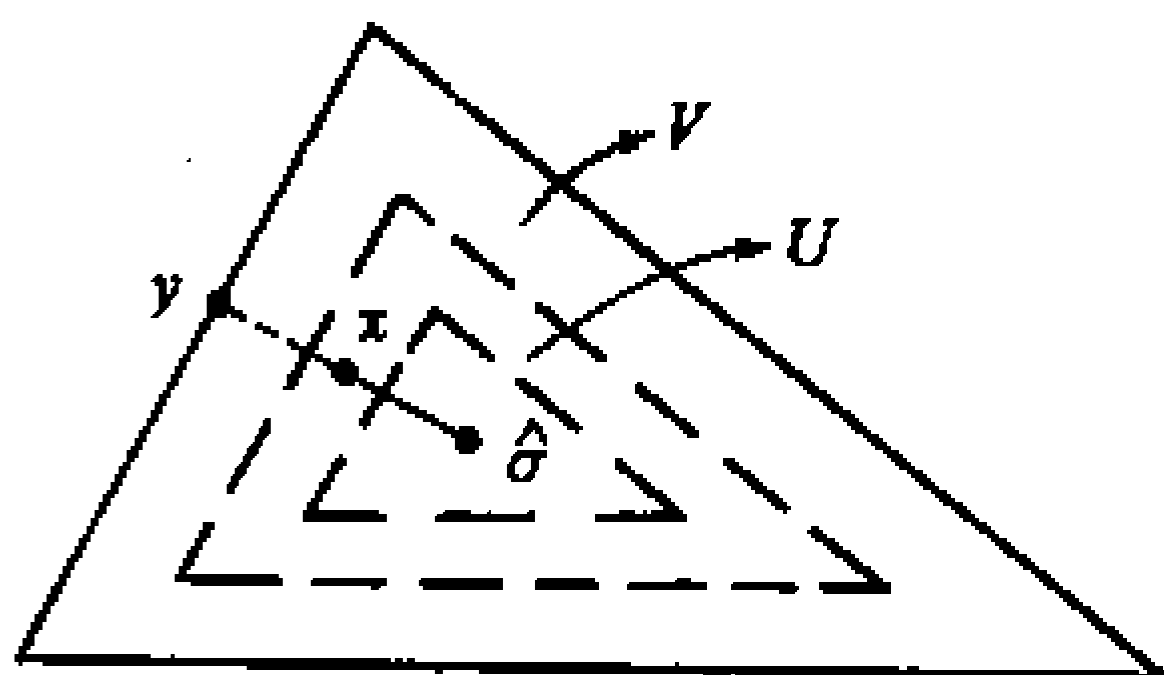
$$(a^0,\ldots,a^r)\longmapsto[l(a^0,\ldots,a^r)]$$

我们将首先证明当 $r=q$ 时 $\bar{l}$ 为同构.

命题 4.1 对 $q\ge 0, \bar{l}\colon C_q(K)\to H_q(|K^q|,|K^{q-1}|)$ 为同构而当 $r\ne q, H_r(|K^q|,|K^{q-1}|)=0$.

我们首先证明一个引理. 设 $\hat{\sigma}$ 为单形 $\sigma=(a^0,a^1,\ldots,a^r)$ 的重心. 任 $x\in\sigma-\{\hat{\sigma}\}$ 有向线段 $\hat{\sigma}x$ 的延长线交 σ 的边界于 y 点, 令 $r(x)=\frac{\|\hat{\sigma}-x\|}{\|\hat{\sigma}-y\|}$, 则 $0<r(x)\le 1$. 令 $U=\{x\in\sigma-\{\hat{\sigma}\}\mid r(x)>\frac{1}{2}\}, V=\{x\in\sigma-\{\hat{\sigma}\}\mid r(x)>\frac{3}{4}\}$, 则 $V\subset U$

都是 σ 的开集，并且有以下引理.



引理 4.2 内射 i 是切除，j 是同伦等价

$$(\sigma, |\dot{\sigma}|) \xrightarrow{j} (\sigma, U) \xleftarrow{i} (\sigma - V, U - V)$$

从而 i, j 都导出同构

$$H_r(\sigma, |\dot{\sigma}|) \xrightarrow{j_*} H_r(\sigma, U) \xleftarrow{i_*} H_r(\sigma - V, U - V)$$

证：显然在 σ 中有 $\overline{V} \subset \mathring{U}$，因此 i 是切除 (见定理 3.13). 为了证明 $j: (\sigma, |\dot{\sigma}|) \simeq (\sigma, U)$，定义 $h: (\sigma, U) \to (\sigma, |\dot{\sigma}|)$ 为 $h(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$，对于 $x \in \sigma - \{U, \hat{\sigma}\}$，在有向线段 $\hat{\sigma}x$ 上取 x' 使 $r(x') = 2r(x)$，定义 $h(x) = x'$. 对于 $x \in U$ 则定义 $h(x) = y, y$ 为 $\hat{\sigma}x$ 与 σ 边界的交点.

h 是连续的，而且容易作出同伦 $F: \sigma \times I \to \sigma$ 使 $h \overset{F}{\simeq} 1_\sigma, F(U \times I) \subset U, F(x, t) = x$ 当 $x \in |\dot{\sigma}|$.

命题 4.1 的证明 设 $\sigma_1^q, \ldots, \sigma_k^q$ 为 K 的所有 q 维有序单形. 根据引理 4.2，令

$$U_i = \{x \in \sigma_i^q \mid r(x) > \frac{1}{2}\}, \quad V = \{x \in \sigma_i^q \mid r(x) > \frac{3}{4}\}$$

从而存在 $h_i: (\sigma_i^q, U_i) \to (\sigma_i^q, |\dot{\sigma}_i^q|)$ 和 $F_i: \sigma_i^q \times I \to \sigma_i^q$ 使 $h_i \overset{F_i}{\simeq} 1_{\sigma_i}, i = 1, 2, \ldots, k$. 现在令

$$U = |K^{q-1}| \cup (\cup_{i=1}^k U_i), \qquad V = |K^{q-1}| \cup (\cup_{i=1}^k V_i)$$

并且令 $j:(|K^q|,|K^{q-1}|)\to(|K^q|,U)$ 为内射. 然后定义 $h:(|K^q|,U)\to(|K^q|,|K^{q-1}|)$ 与 $F:|K^q|\times I\to|K^q|$ 为

$$h(x)=x, F(x,t)=x, \text{当} x\in|K^{q-1}|, 0\le t\le 1$$

$$h(x)=h_i(x), F(x,t)=F_i(x,t), \text{当} x\in\sigma_i^q, 0\le t\le 1, i=1,\ldots,k$$

根据粘接引理, h 和 F 都连续, 并且 $h\overset{F}{\simeq}1_{|K^q|}:|K^q|\to|K^q|$, 使 $F(U\times I)\subset U, F(x,t)=x$ 当 $x\in|K^{q-1}|$. 因此 j 是同伦等价,

$$j_*:H_r(|K^q|,|K^{q-1}|\cong H_r(|K^q|,U)$$

另一方面, 内射 $i:(|K^q|-V,U-V)\to(|K^q|,U)$ 显然是切除, 因此

$$i_*:H_r(|K^q|-V,U-V)\cong H_r(|K^q|,U)$$

从而 $j_*^{-1}i_*:H_r(|K^q|-V,U-V)\cong H_r(|K^q|,|K^{q-1}|)$. 但是 $(|K^q|-V,U-V)=(\cup_{i=1}^k(\sigma_i^q-V_i),\cup_{i=1}^k(U_i-V_i))$ 是 k 个互不相交的道路连通分支的并集, 因此 $H_r(|K^q|-V,U-V)\cong\oplus_{i=1}^k H_r(\sigma_i^q-V_i,U_i-V_i)$, 再利用引理 4.2, 得出

$$H_r(|K^q|,|K^{q-1}|)\cong\oplus_{i=1}^k H_r(\sigma_i^q,|\dot{\sigma}_i^q|)$$

而且这个同构是由内射所导出的.

因为 $(\sigma_i^q,|\dot{\sigma}_i^q|)\cong(E^q,S^{q-1})$, 由例 3.17 得出 $H_r(|K^q|,|K^{q-1}|)=0$, 当 $r\neq q$. 另外有 $H_q(\sigma_i^q,|\dot{\sigma}_i^q|)\cong Z$, 由线性奇异单形 $l(\sigma_i^q)$ 所生成, 因此得出

$$\bar{l}:C_q(K)\cong H_q(|K^q|,|K^{q-1}|)$$

证毕.

现在记自由 Abel 群 $\Gamma_q=H_q(|K^q|,|K^{q-1}|)$, 并且定义 $\bar{\partial}:\Gamma_q\to\Gamma_{q-1}$ 为以下合成

$$H_q(|K^q|,|K^{q-1}|)\xrightarrow{\partial_*}H_{q-1}(|K^{q-1}|)\xrightarrow{j_*}H_{q-1}(|K^{q-1}|,|K^{q-2}|)$$

其中 ∂_* 为 $(|K^q|,|K^{q-1}|)$ 同调正合序列的联结同态.

下面说明以下图形是可换的

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma_q & & \xrightarrow{\quad\overline{\partial}\quad} & & \Gamma_{q-1} \\
\| & & & & \| \\
H_q(|K^q|,|K^{q-1}|) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(|K^{q-1}|) & \xrightarrow{j_*} & H_{q-1}(|K^q|,|K^{q-1}|) \\
\uparrow{\scriptstyle \bar{l}} & & & & \uparrow{\scriptstyle \bar{l}} \\
C_q(K) & & \xrightarrow{\quad\partial\quad} & & C_{q-1}(K)
\end{array}$$

这是因为对于 K 的有序单形 $(a^0,\ldots,a^q)$

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\bar{l}(a^0,\ldots,a^q) &= j_*\partial_*[(a^0,\ldots,a^q)] = j_*[\partial(a^0,\ldots,a^q)] \\
&= j_*[l\partial(a^0,\ldots,a^q)] = \bar{l}\partial(a^0,\ldots,a^q)
\end{aligned}$$

因此 $\bar{l}$ 导出 K 的单纯同调群和链复形 $\{\Gamma_q,\overline{\partial}_q\}$ 的同调群的同构

$$\bar{l}_*: H_n(K) \cong H_n(\Gamma), \qquad n \in Z$$

下面的工作是证明 $H_n(\Gamma)$ 和奇异同调群 $H_n(|K|)$ 同构 (任 $n \in Z$), 为此先证明两个命题.

命题 4.3 对 $q > 0, H_q(|K^r|) = 0$, 当 $r < q$.

证: 若 $r = 0, |K^0|$ 是有限个点的集合, 显然有 $H_q(|K^0|) = 0(q > 0)$. 对 r 作归纳法, 设对 $r < q$ 命题已成立. 考虑正合序列

$$H_{q+1}(|K^r|,|K^{r-1}|) \xrightarrow{\partial_*} H_q(|K^{r-1}|) \xrightarrow{i_*} H_q(|K^r|) \xrightarrow{j_*} H_q(|K^r|,|K^{r-1}|)$$

根据命题 4.1, 第一项和最后一项为 0, 这样便得出

$$i_*: H_q(|K^{r-1}|) \cong H_q(|K^r|)$$

而前者根据归纳假设为 0. 完成了归纳法.

命题 4.4 对 $q > 0, H_q(|K|, |K^r|) = 0$, 当 $r \geq q$ 时.

证: 若 $r \geq \dim K$, 则 $|K^r| = |K|$, 显然 $H_q(|K|, |K^r|) = 0$. 对 r 作向下归纳, 设 $H_q(|K|, |K^{r+1}|) = 0$ 当 $r \geq q$. 考虑三重组 $(|K|, |K^{r+1}|, |K^r|)$ 的正合序列. $H_q(|K^{r+1}|, |K^r|) \xrightarrow{i_*} H_q(|K|, |K^r|) \xrightarrow{j_*} H_q(|K|, |K^{r+1}|) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(|K^{r+1}|, |K^r|)$. 由命题 4.1, 第一项和最后一项为 0, 因此

$$j_*: H_q(|K|, |K^r|) \cong H_q(|K|, |K^{r+1}|)$$

而后一项根据归纳假设为 0, 完成了归纳法.

现在我们的准备工作已全部做完, 可以证明以下本节的主要定理.

定理 4.5 当 $r \leq \dim K$, 链映射 $l': C_r(K) \to S_r(|K|)$ 导出同构 $l'_*: H_r(K) \cong H_r(|K|)$, 而当 $r > \dim K$ 时, 有 $H_r(K) = H_r(|K|) = 0$. 在这里 l' 将每个 K 的有序单形 $(a^0, \ldots, a^r)$ 映成线性的奇异单形 $(a^0, \ldots, a^r)$.

证: 我们只要证明 $H_r(\Gamma) \cong H_r(|K|)$(任 $r \in Z$). 考虑以下同态的图表

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\Gamma_{q+1} & & \xrightarrow{\bar{\partial}_{q+1}} & & \Gamma_q & & \xrightarrow{\bar{\partial}_q} & & \Gamma_{q-1} \\
\| & & H_q(|K^{q-1}|)=0 & & \| & & H_{q-1}(|K^{q-2}|)=0 & & \| \\
\| & & \downarrow i_* & & \| & & \downarrow i'_* & & \| \\
H_{q+1}(|K^{q+1}|, |K^q|) & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(|K^q|) & \xrightarrow{j_*} & H_q(|K^q|, |K^{q-1}|) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{q-1}(|K^{q-1}|) & \xrightarrow{j'_*} & H_{q-1}(|K^{q-1}|, |K^{q-2}|) \\
\downarrow \bar{i}_* & \nearrow \partial^0_* & \downarrow i^0_* & & & & & & \\
H_{q+1}(|K|, |K^q|) & & H_q(|K|) & & & & & & \\
\downarrow \bar{j}_* & & \downarrow j^0_* & & & & & & \\
H_{q+1}(|K|, |K^{q+1}|) & & H_q(|K|, |K^q|) & & & & & & \\
\| & & \| & & & & & & \\
0 & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

其中第一竖列是三重组 $(|K|,|K^{q+1}|,|K^q|)$ 的正合序列，第二竖列是空间偶 $(|K|,|K^q|)$ 的同调正合序列，注意到是 ∂_*^0,i_*^0,j_*^0 组成的序列. 另外 i_*,j_*,∂'_* 组成正合序列. i'_*,j'_* 组成正合序列. 图中标出等于 0 的部分是由命题 4.3 或 4.4 得出.

由正合性，$\bar{i}_*$ 和 i_*^0 满同态，j_* 和 j'_* 单同态. 根据联结同态的定义有 $\partial_*=\partial_*^0\bar{i}_*$. 于是对任意 $q\in Z$ 有

$$\begin{aligned}
H_q(\Gamma) &= \ker\bar{\partial}_q/\mathrm{im}\bar{\partial}_{q+1}=\ker(j'_*\partial'_*)/\mathrm{im}(j_*\partial_*)\\
&= \ker\partial'_*/\mathrm{im}(j_*\partial_*)=\mathrm{im}j_*/\mathrm{im}(j_*\partial_*)\\
&\cong H_q(|K^q|)/\mathrm{im}\partial_*=H_q(|K^q|)/\mathrm{im}(\partial_*^0\bar{i}_*)\\
&= H_q(|K^q|)/\mathrm{im}\partial_*^0 \qquad (\text{因为}\bar{i}_*\text{满})\\
&= H_q(|K^q|)/\ker i_*^0 \qquad (\text{因为}\mathrm{im}\partial_*^0=\ker i_*^0)\\
&\cong H_q(|K|) \qquad (\text{因为}i_*^0\text{满})
\end{aligned}$$

而且上述一系列同构都是内射所诱导的，与前面所述的同构 $\bar{l}_*:H_q(K)\cong H_q(\Gamma)$ 合成就得到本定理结论.

推论 4.6 设 (K,L) 是单纯复形偶，则有同构

$$l'_*:H_n(K,L)\cong H_n(|K|,|L|),n\in Z$$

证：不难验证以下是链复形短正合序列的可换图.

$$\begin{array}{ccccccccc}
O & \longrightarrow & C_n(L) & \xrightarrow{i} & C_n(K) & \xrightarrow{j} & C_n(K,L) & \longrightarrow & O\\
 & & \downarrow l' & & \downarrow l' & & \downarrow l' & & \\
O & \longrightarrow & S_n(|L|) & \xrightarrow{i'} & S_n(|K|) & \xrightarrow{j'} & S_n(|K|,|L|) & \longrightarrow & O
\end{array}$$

根据定理 3.3, 产生出长正合序列的可换图

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H_n(L) & \xrightarrow{i_*} & H_n(K) & \xrightarrow{j_*} & H_n(K,L) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(L) & \xrightarrow{i_*} \cdots \\
& \downarrow l'_* & & \downarrow l'_* & & \downarrow l'_* & & \downarrow l'_* & \\
\cdots \longrightarrow & H_n(|L|) & \xrightarrow{i'_*} & H_n(|K|) & \xrightarrow{j'_*} & H_n(|K|,|L|) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{n-1}(|L|) & \xrightarrow{i'_*} \cdots
\end{array}
$$

由定理 4.5, 两边四个 l'_* 都是同构. 因此由五项引理得出中间的 l'_* 为同构.

推论 4.7 若多面体 $|K_1|=|K_2|$, 则 $H_n(K_1)\cong H_n(K_2)$(任 $n\in Z$). 这就是说, 同一多面体的不同剖分, 其单纯同调群是一致的, 单纯同调群也同样是伦型不变量.

下面我们介绍多面体的同调群的计算方法. 由于多面体 $|K|$ 的单形个数一般比较多, 因此需要将若干个单形组合成所谓的块形, 使计算能得到某种化简.

定义 4.8 单纯复形 K 中的 n 维块形 是 K 的子复形偶 $(e,\dot{e})$ 使得 $\dim e=n$, 而且 $(n\geq 0)$

$$
H_r(e,\dot{e})\cong\begin{cases} Z & r=n \\ 0 & r\neq n \end{cases}
$$

其中 $\dot{e}$ 叫做 e 的 *边界*, $e-\dot{e}$ 叫做 e 的 *内部*. 当 $n=0$ 规定 $\dot{e}=\phi$.

以上块形的条件是用同调群来刻划的, 这在实践中将很难掌握如何在 K 中组成块形 $(e,\dot{e})$. 但是由于 n 维圆盘和它的边界 (E^n,S^{n-1}) 有 (见例 3.17)

$$
H_r(E^n,S^{n-1})=\begin{cases} Z & r=n \\ 0 & r\neq n \end{cases}
$$

因此可以给出一个粗略的但很直观的判断块形的一个法则, 如以下命题所述.

命题 4.9 设 (M,N) 是 (E^n,S^{n-1}) 的剖分, $f:|M|\to|K|$ 是单纯映射使 f 在 $|M|-|N|$ 上是一一的, 则

$(f(M), f(N))$ 是 K 中 n 维块形，其中 $f(M) = \{f(\sigma) \mid \sigma \in M\}$.

证：因为 f 在 $|M| - |N|$ 上是一一的单纯映射，则 f 导出的链映射 $f_{\#}: C_r(M, N) \to C_r(f(M), f(N))$ 是链同构，从而 $f_*: H_r(E^n, S^{n-1}) \cong H_r(f(M), f(N)), \dim f(M) = n$ 是显然的，因此 $(f(M), f(N))$ 满足定义 4.8 的条件.

定义 4.10 单纯复形 K 的 块形剖分 是 K 的有限个块形的集合，满足

(a) K 的每个单形恰在一个块形的内部.

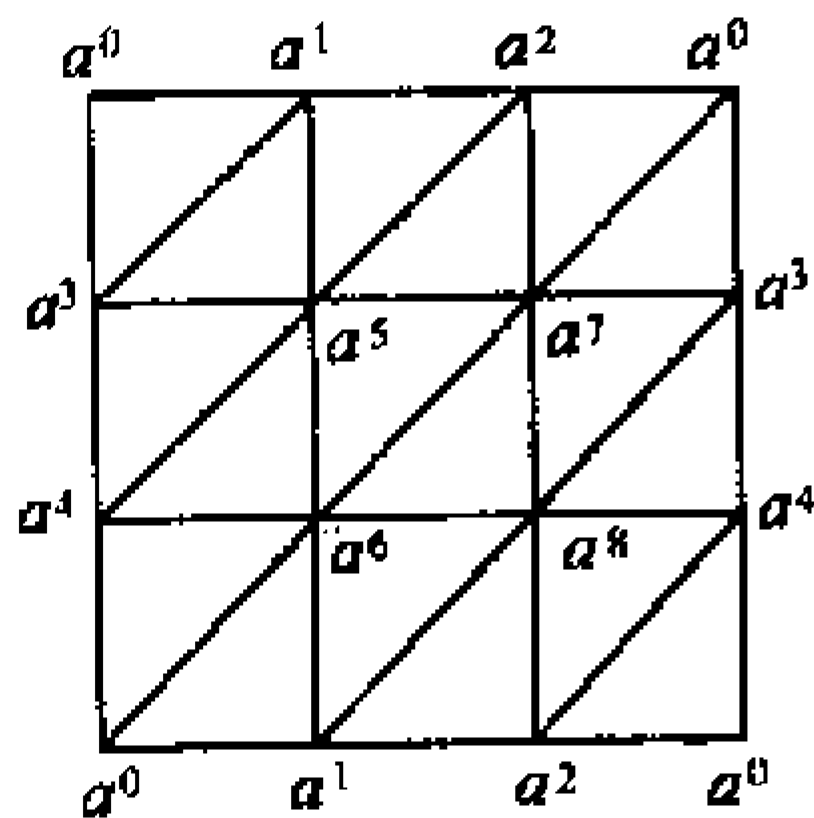
(b) 每个 n 维块形的边界是若干个 m 维块形的并集 $(m < n)$.

例 4.11 设复形 K 是环面 T 的剖分如下图所示. 我们给出 K 的一个块形剖分，由以下块形组成

一个 2 维块形 $e^2 = K$

两个 1 维块形 $\begin{cases} e_1^1 = \{(a^0, a^1), (a^1, a^2), (a^2, a^0), (a^0), (a^1), (a^2)\} \\ e_2^1 = \{(a^0, a^3), (a^3, a^4), (a^4, a^0), (a^0), (a^3), (a^4)\} \end{cases}$

一个 0 维块形 $e^0 = \{(a^0)\}$



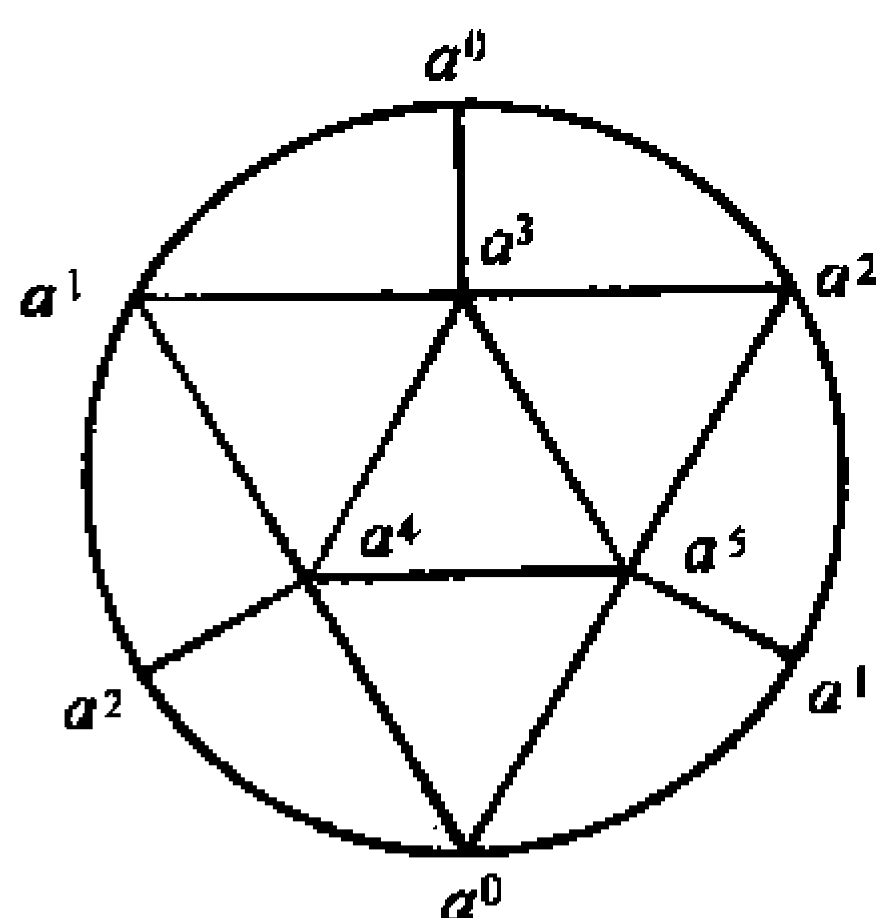
并且规定 $\dot{e}^2 = e_1^1 \cup e_2^1, \dot{e}_1^1 = \dot{e}_2^1 = e^0, \dot{e}^0 = \emptyset$. 这显然满足块形剖分的条件 (a) 和 (b).

例 4.12 设 L 是 RP^2 的剖分如下图. 以下给出块形剖分

$$\begin{aligned} e^2 &= \text{整个复形} L \\ e^1 &= \{(a^0, a^1), (a^1, a^2), (a^2, a^0), (a^0), (a^1), (a^2)\} \end{aligned}$$

$$e^0 = \{(a^0)\}$$

并且规定 $\dot{e}^2 = e^1, \dot{e}^1 = e^0, \dot{e}^0 = \phi$.



定义 4.13 设 K 已给出块形剖分

(1) 单纯复形 K 的单纯子复形 L 叫做 K 的 **块子复形**, 如果 L 是 K 的若干个块形的并集.

(2) K 的 **块 n 维架** K_n 是所有 m 维块形并集 $(m \leq n)$, 它显然是一个块子复形.

(3) n 维块形 $(e, \dot{e})$ 中所有 n 维单形 $\{\sigma_i\}$ 的如下线性组合 $\sum \sigma_i$ 叫做 **n 维块形链**.

单纯链 $\sum m_i\sigma_i \in C_n(e, \dot{e})$ 因为整系数 m_i 互不相等, 因此未必是块形链. 但块形链 $\sum \sigma_i$ 每个系数为 1, 显然是单纯链.

定义 4.14 设复形 K 已给出块形剖分, L 为块子复形. $M^n = K_n \cup L$ 叫做 K 的 **相对块 n 维架**.

定理 4.15 当 $r \neq n$, $H_r(M^n, M^{n-1}) = 0$ 而 $H_n(M^n, M^{n-1})$ 是自由 Abel 群, 其生成元和含在 $K - L$ 中的所有 n 维块形一一对应.

证: $M^n - M^{n-1} = (K_n \cup L) - (K_{n-1} \cup L) = K_n - (K_{n-1} \cup L) = \cup_i(e_i, \dot{e}_i)$, 其中和式取遍内部含在 $K - L$ 的所有 n 维块形 $(e_i, \dot{e}_i)$. 因此它们的相对链群之间有

$$\begin{array}{ccc} C_r(M^n,M^{n-1}) & = & \oplus_i C_r(e_i,\dot{e}_i) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \oplus_i \partial \\ C_{r-1}(M^n,M^{n-1}) & = & \oplus_i C_{r-1}(e_i,\dot{e}_i) \end{array}$$

这是因为每个单形在唯一块形的内部. 过渡到同调群有

$$H_r(M^n,M^{n-1}) \cong \oplus_i H_r(e_i,\dot{e}_i) = \begin{cases} 0 & r \neq n \\ \oplus_i Z & r = n \end{cases}$$

现在考虑 $H_n(M^n,M^{n-1})$. 因为 $C_{n+1}(M^n,M^{n-1}) = 0$, 因此 $H_n(M^n,M^{n-1}) = Z_n(M^n,M^{n-1}) \subset C_n(M^n,M^{n-1}) = C_n(K,L)$, 最后一个等式是由于 $M^n - M^{n-1}$ 中所有 n 维单形就是 $K-L$ 中所有 n 维单形的缘故. 这就是说, $H_n(M^n,M^{n-1})$ 是单纯链群 $C_n(K,L)$ 的子群.

令 $C_n = H_n(M^n,M^{n-1})$ 为 n 维块形链群. $\theta: C_n \hookrightarrow C_n(K,L)$ 为内射同态. 定义边缘同态 $d_{n+1}: C_{n+1} \to C_n$ 为以下合成

$$C_{n+1} = H_{n+1}(M^{n+1},M^n) \xrightarrow{\partial_*} H_n(M^n,L) \xrightarrow{j_*} H_n(M^n,M^{n-1}) = C_n$$

其中 ∂_* 为 (M^{n+1},M^n,L) 的同调正合序列的联结同态.

命题 4.16 $C = \{C_n, d_n\}$ 为链复形, θ 为链映射.

证: 只要证明 $dd = 0$ 和以下图形可换, 即 $\theta d = \partial\theta$. 由正合性, $\partial_*^2 j_*^1 = 0$, 因此 $dd = 0$. 任 $x \in C_n, dx = j_*^1\partial_*^1(x)$, 考虑以下链复形短正合序列

$$O \to C(M^{n-1},L) \xrightarrow{i} C(M^n,L) \xrightarrow{j} C(M^n,M^{n-1}) \to 0$$

显然 $x \in C_n \subset C_n(M^n,M^{n-1})$ 是 $M^n - M^{n-1}$ 中 n 维单形的线性组合, 又因为 $M^n - M^{n-1} \subset M^n - L$, 因此可看作 $x \in C_n(M^n,L)$, 即 $j(x) = x$, 同样也有 $\partial x = j(\partial x)$. 因此

$$dx = j_*^1\partial_*^1(x) = j_*\partial x = j\partial x = \partial x \in Z_{n-1}(M^{n-1},M^{n-2})$$

$$\theta dx = \partial x = \partial\theta x \qquad \text{(因为}\theta\text{内射, }\theta(y) = y\text{)}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
C_{n+1} & = & H_{n+1}(M^{n+1},M^n) & \xrightarrow{\theta} & C_{n+1}(K,L) \\
\downarrow d & & \downarrow \partial_*^1 & & \downarrow \partial \\
& & H_{n-1}(M^{n-1},L) & & \\
& & \downarrow j_*^1 & & \\
C_n & = & H_n(M^n,M^{n-1}) & \xrightarrow{\theta} & C_n(K,L) \\
\downarrow d & & \downarrow \partial_*^2 & & \downarrow \partial \\
& & H_{n-1}(M^{n-1},L) & & \\
& & \downarrow j_*^2 & & \\
C_{n-1} & = & H_{n-1}(M^{n-1},M^{n-2}) & \xrightarrow{\theta} & C_{n-1}(K,L)
\end{array}
$$

定理 4.17 链映射 $\theta: C \to C(K,L)$ 导出同构

$$\theta_*: H_n(C) \cong H_n(K,L), n \in Z$$

证：证明和定理 4.5 的证明类似，只叙述主要步骤如下

$$
\begin{aligned}
Z_n(C) &= \ker d = \ker j_*^2\partial_*^2 \\
&= \ker\partial_*^2 \qquad (\text{由正合序列}, j_*^2\text{单}) \\
&= \operatorname{im} j_*^1 \qquad (\text{由正合性}) \\
&\cong H_n(M^n, L) \qquad (\text{因为} j_*^1\text{单})
\end{aligned}
$$

$$B_n(C) = \operatorname{im} d = \operatorname{im} j_*^1\partial_*^1 \cong \operatorname{im}\partial_*^1 (\text{因为} j_*^1\text{单})$$

$$
\begin{aligned}
H_n(C) &\cong H_n(M^n, L)/\operatorname{im}\partial_*^1 \\
&\cong \operatorname{im}[i_*: H_n(M^n, L) \to H_n(M^{n+1}, L)] \\
&= H_n(M^{n+1}, L) \qquad (\text{因为} i_*\text{满})
\end{aligned}
$$

再由 (M^{n+2}, M^{n+1}, L) 的同调正合序列和定理 4.15, 有

$$H_n(M^{n+1}, L) \cong H_n(M^{n+2}, L) \cong \cdots \cong H_n(K, L)$$

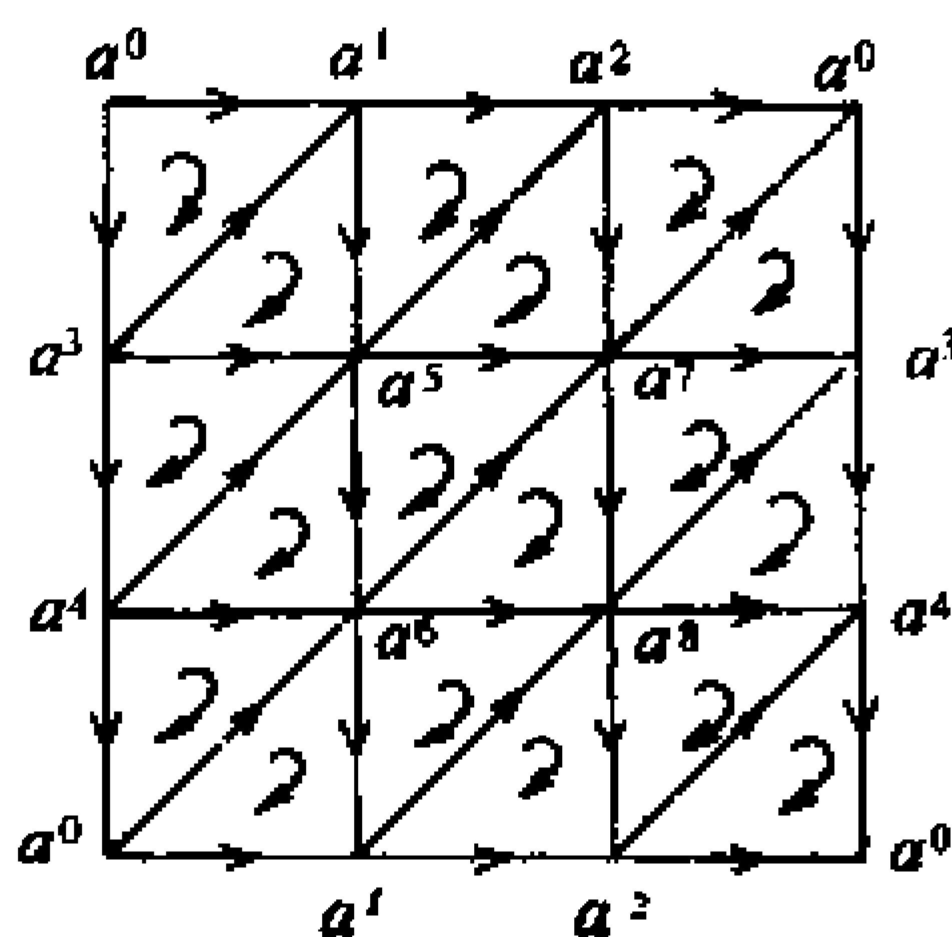
因此 $H_n(C) \cong H_n(K,L)$ 而且是由内射 θ 所导出.

定理 4.17 告诉我们，单纯同调群 $H_n(K,L)$ 可用块形链复形 $C=\{C_n,d_n\}$ 的同调群来计算. 由于边缘运算 $d_n\colon C_n \to C_{n-1}$ 只对每个块形作用，相对来说计算要简单一些.

例 4.18　对环面 $T, H_1(T) \cong Z \oplus Z, H_2(T) \cong Z$.

证：我们采用例 4.11 中的单纯剖分 K 和块形剖分如下，并对 K 的每个单形都取定一个定向

$$\begin{aligned}
e^2 &= K \quad C_2 \cong Z, \text{ 以} z^2 \text{为生成元} \\
e_1^1 &= \{(a^0,a^1),(a^1,a^2),(a^2,a^0),(a^0),(a^1),(a^2)\}, \\
&\quad\; C_1 \cong Z \oplus Z, \text{ 以} z_1^1, z_2^1 \text{为生成元} \\
e_2^1 &= \{(a^0,a^3),(a^3,a^4),(a^4,a^0),(a^0),(a^3),(a^4)\}, \\
&\quad\; C_0 \cong Z, \text{ 以} z^0 \text{为生成元} \\
e^0 &= \{(a^0)\}
\end{aligned}$$



其中 $z_2=18$ 个 2 维定向单形之和， $z_1^1=(a^0,a^1)+(a^1,a^2)+(a^2,a^0), z_2^1=(a^0,a^3)+(a^3,a^4)+(a^4,a^0), z^0=(a^0)$.

现在计算 dz^2, dz_1^1, 和 dz_2^1. 注意到 $\theta d=\partial\theta$, 因此边缘运算 d 实际上是原来单纯链的边缘运算 ∂. 容易得出

$$\begin{aligned}
dz_1^1 &= \partial(a^0a^1)+\partial(a^1a^2)+\partial(a^2a^0)=0 \\
dz_2^1 &= \partial(a^0a^3)+\partial(a^3a^4)+\partial(a^4a^0)=0
\end{aligned}$$

$$dz^2 = \sum_{1=1}^{18} \partial\sigma_i^2 = 0$$

因此 $Z_2(C) \cong Z$ 以 z^2 为生成元, $B_2(C) = 0. Z_1(C) \cong Z \oplus Z.$ 以 z_1^1, z_2^1 为生成元, $B_1(C) = 0$. 因此结论马上得出.

例 4.19 $H_1(RP^2) \cong Z_2, H_2(RP^2)=0, H_r(RP^2)=0, r < 0$ 或 $r > 2$.

证: 在例 4.12 的 RP^2 剖分 L 中, 对每个单形都取定一个定向, 并给于块形剖分如下

$$\begin{aligned} e^2 &= L, \quad C_2 \cong Z \\ e^1 &= \{(a^0a^1),(a^1a^2),(a^2a^0),(a^0),(a^1),(a^2)\}, \quad C_1 \cong Z \\ e^0 &= \{(a^0)\}, \quad C_0 \cong Z \end{aligned}$$

其中块形链群 C_0, C_1, C_2 分别以 $z^0 = a^0, z^1 = (a^0a^1)+(a^1a^2)+(a^2a^0), z^2 = 10$ 个 2 维定向单形之和为生成元. 容易算出

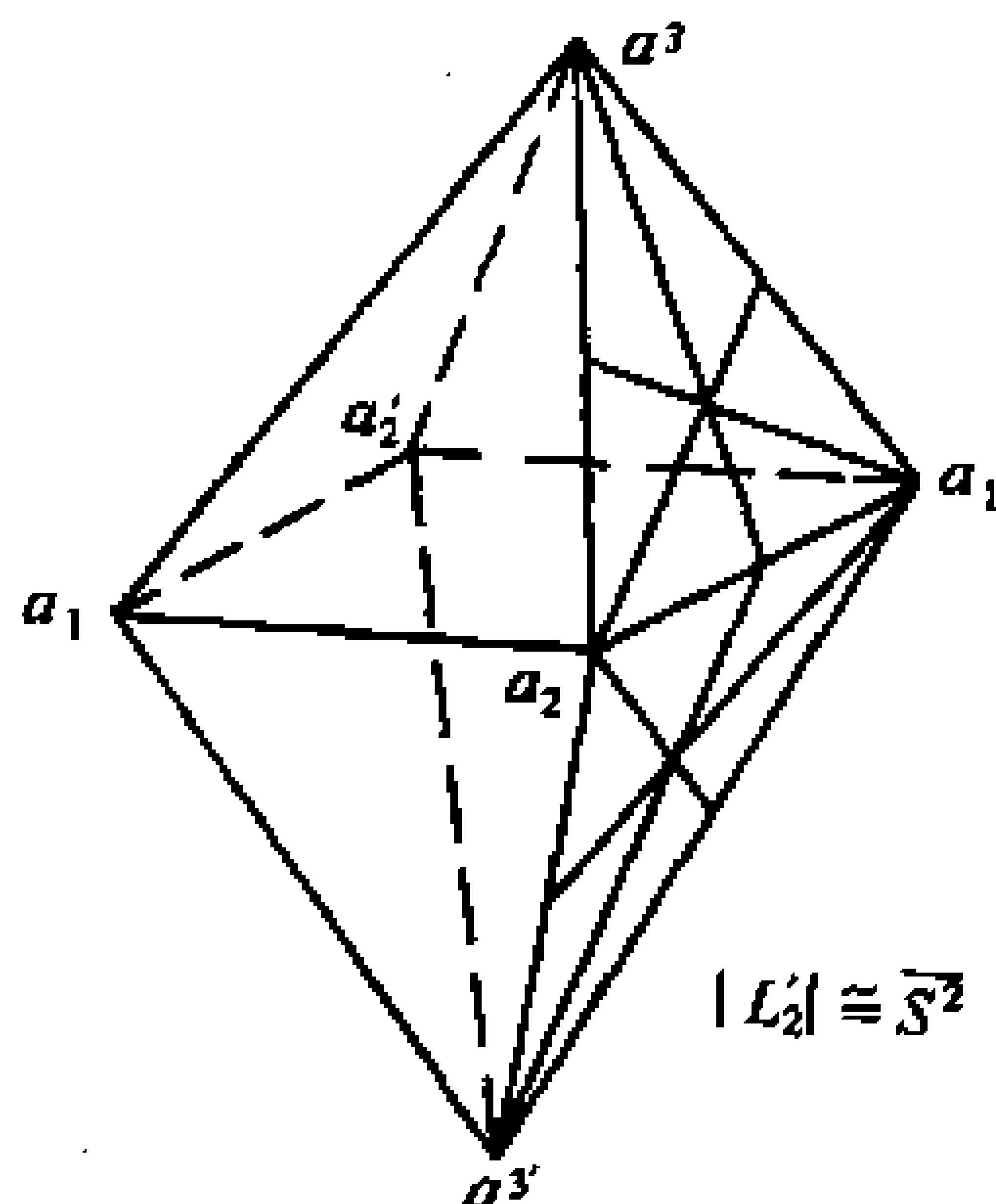
$$dz^2 = 2z^1, dz^1 = 0$$

因此 $Z_2(C) = 0, Z_1(C) \cong Z$ 以 z^1 为生成元. $B_1(C) \cong Z$ 以 $2z^1$ 为生成元. 因此 $H_2(RP^2) = 0, H_1(RP^2) \cong Z/2Z = Z_2$

例 4.20

$$\begin{aligned} H_0(RP^n) &\cong Z, H_r(RP^n) = 0, \text{当} r < 0 \text{或} r > n \text{或} r \text{偶} \\ H_r(RP^n) &\cong Z_2, \quad \text{当} 0 < r < n \text{且} r \text{奇} \\ H_n(RP^n) &\cong Z, \quad \text{当} n \text{奇} \end{aligned}$$

证: RP^n 可看作 “八面形”$\overline{S}^n$(参见第二章例 1.15(2)) 将对径点叠合. 设复形 L_n 为 $\overline{S}^n$ 的剖分, 即 “八面形” 剖分, 令 L'_n 为 L_n 的重心重分. 因此 L'_n 的任一顶点 a 的对径点也是 L'_n 的顶点. 将 L'_n 的对径顶点叠合, 再将对径单形也叠合, 则组成复形 M_n 为 RP^n 的单纯剖分.



因为 $\overline{S}^n = \overline{S}^n_+ \cup \overline{S}^n_-$, 其中 $\overline{S}^n_+$ 与 $\overline{S}^n_-$ 为 $\overline{S}^n$ 的上半部分与下半部分，而且 $\overline{S}^n_+, \overline{S}^n_-$ 的边界都是 $\overline{S}^{n-1}$, 因此对 L_n' 可给出块形剖分

$$l^n_\pm = \overline{S}^n_\pm\text{上所有单形组成的子复形}$$

$$l^{n-1}_\pm = \overline{S}^{n-1}_\pm\text{上所有单形组成的子复形}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l^1_\pm = \overline{S}^1_\pm\text{上所有单形组成的子复形}$$

$$l^0_\pm = \overline{S}^0_\pm\text{上所有单形组成的子复形}$$

设 $p: |L_n'| \to |M_n| \cong RP^n$ 为商映射，则 $\overline{e}^n, \overline{e}^{n-1}, \ldots, \overline{e}^0$ 为 M_n 中的块形剖分，其中 $\overline{e}^i = p(l^i_\pm)$. 因此有块形链群

$$C_r \cong Z \quad \text{以}\overline{z}^r\text{为生成元,} \qquad \overline{z}^r\text{为}\overline{e}^r\text{上块形链}, r = 0, 1, \ldots, n$$

下面证明 $d\overline{z}^r = [1 + (-1)^r]\overline{z}^{r-1}$.

设 a_i 与 $a_i'(1 \leq i \leq r)$ 为 "八面形" 剖分 L_r 的对径顶点. 令 $z_0 = a_1 - a_1'$, 则 $\partial z_0 = 0$, 即 $z_0 \in Z_0(L_0)$. 设 $z_{r-1} \in Z_{r-1}(L_{r-1})$, 即 $\partial z_{r-1} = 0$. 令 $z_r = a_{r+1}z_{r-1} - a_{r+1}'z_{r-1}$, 则 $\partial z_r = [z_{r-1} - a_{r+1}(\partial z_{r-1})] - [z_{r-1} - a_{r+1}'(\partial z_{r-1})] = 0$, 因此

$z_r \in Z_r(L_r)$. 设 L_r^+ 表示 L_r 的上半部分，则 $a_{r+1}z_{r-1}$ 为 $Z_r(L_r^+, L_{r-1})$ 的单个生成元.

和命题 3.7 的叙述类似，有一个重分链映射

$$sd': Z_r(L_r^+, L_{r-1}) \to Z_r((L_r^+)', L'_{r-1})$$

使 $sd'(a_{r+1}z_{r-1})$ 为 $Z_r((L_r^+)', L'_{r-1})$ 的生成元. 因此

$$p_\# sd'(a_{r+1}z_{r-1}) \in Z_{r-1}(M_r, M_{r-1}) = C_r$$

为生成元，恰好是 $\overline{z}^r = p_\# sd'(a_{r+1}z_{r-1})$. 因此有

$$\begin{aligned} d\overline{z}^r &= p_\# sd'\partial(a_{r+1}z_{r-1}) = p_\# sd'(z_{r-1}) \\ &= p_\# sd'(a_r z_{r-2} - a'_r z_{r-2}) \\ &= p_\# sd'(a_r z_{r-2}) + (-1)^r p_\# sd'(a_r z_{r-2}) \\ &= [1 + (-1)^r]\overline{z}^{r-1} \end{aligned}$$

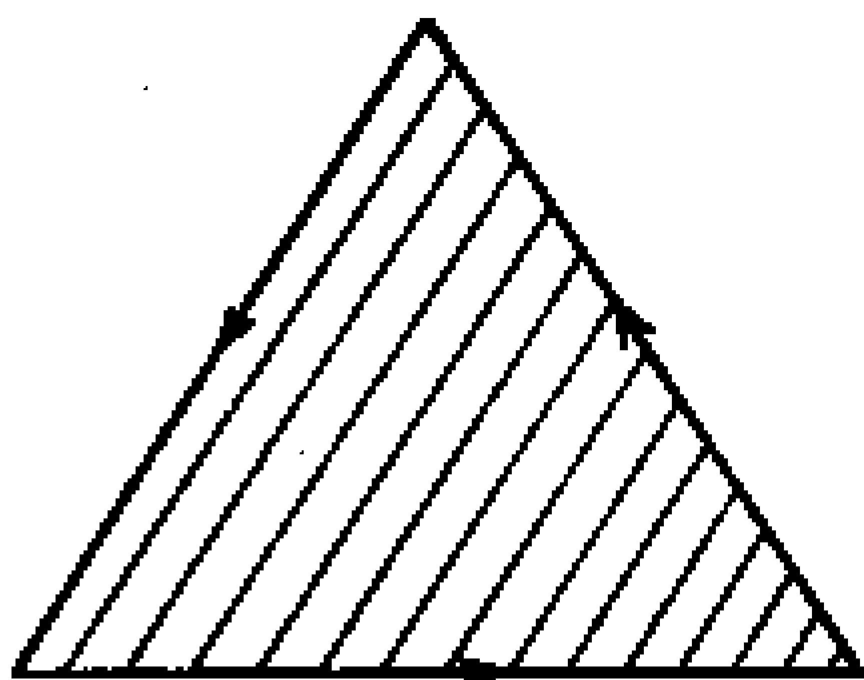
最后第二个等式是根据 $z'_{r-2} = (-1)^{r-1} z_{r-2}, p_\# sd'(a'_r z'_{r-2}) = p_\# sd'(a_r z_{r-2})$ 而得出的. 这样本例的结论立即得出.

习　题

1. 证明多面体的切除定理：设 (K, L) 为单纯复形偶，K_1 为 K 的子复形使 $K = K_1 \cup L$. 令 $L_1 = K_1 \cap L$, 则有内射诱导的同构 $i_*: H_n(|K_1|, |L_1|) \cong H_n(|K|, |L|)$.

2. 试给出 Möbius 带的块形剖分并计算它的同调群.

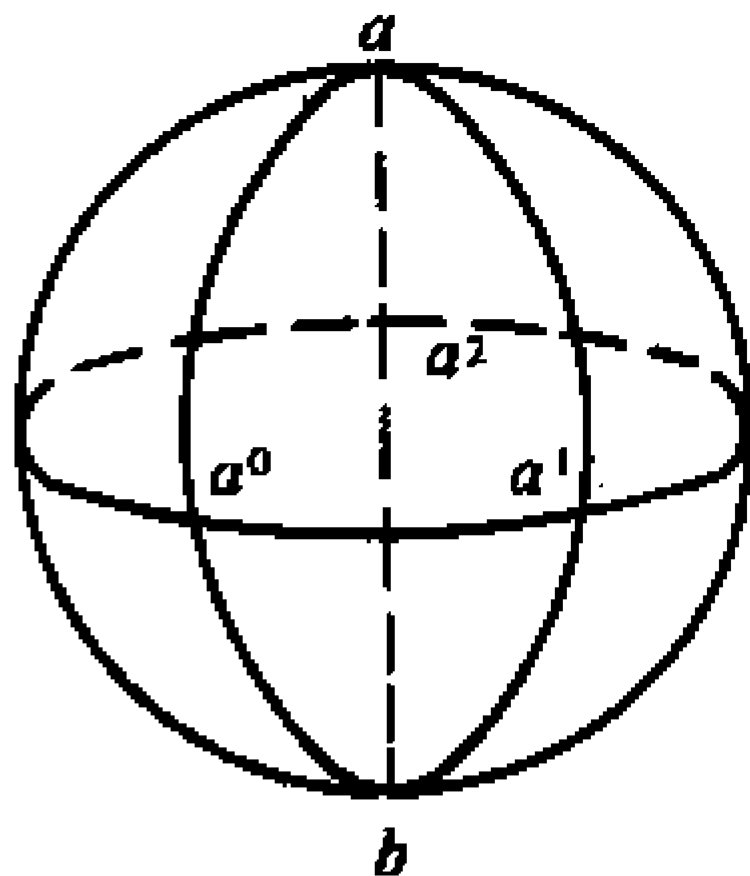
3. 设 X 为等边三角形将每个边按图中箭头方向叠合. 试给出 X 的单纯剖分和块形剖分，并计算它的同调群.



4. 已给互素的整数 p, q 且 $p \geq 2$. 透镜空间 $L(p, q)$ 是 E^3

在边界 S^2 上做如下叠合而得的空间. 将赤道 S^1 作 p 等分, 其等分点为 $a^0.a^1,\ldots,a^{p-1}$, 并且都和极点 $a=(0,0,1),b=(0,0,-1)$ 联结, 如图. $L(p,q)$ 是通过将每个三角形 aa^ra^{r+1} 和 $ba^{r+q}a^{r+q+1}$ 叠合而得, 其中 $r+q,r+q+1$ 按模 p 整数考虑. 通过给出适当的块形剖分证明:

$$H_1(L(p,q))\cong Z_p,\quad H_2(L(p,q))\cong 0,\quad H_3(L(p,q))\cong Z$$



5. 设 (K,L) 为单纯偶. 证明: 存在双角锥同构

$$s_*: H_n(K,L)\cong H_{n+1}(SK,SL)$$

使当 $f:(|K|,|L|)\to(|M|,|N|)$ 为映射, $s_*f_*=(Sf)_*s_*$.

6. 设 L,M 为复形 K 的子复形使 $M\subset L\subset K$. 证明: 存在单纯同调群的正合序列

$$\ldots\longrightarrow H_n(L,M)\xrightarrow{i_*}H_n(K,M)\xrightarrow{j_*}H_n(K,L)\xrightarrow{\partial_*}H_{n-1}(L,M)\longrightarrow\ldots$$

§5 一般系数的同调群

到目前为止, 我们只涉及到其链群为自由 Abel 群的链复形的同调群. 例如对拓扑空间 X, $S(X)$ 的每个元素是形式线性组合 $\sum m_i\lambda_i$, 其中 λ_i 为奇异单形而 m_i 为整数. 可是, 以下的推广经常是有用的: 将上述的整数 m_i 改成为 Abel 群 G

的任一元素. 这样得到的链复形记为 $S(X,G)$, 并且其相应的同调群是 $H_n(X,G)$, 以 Abel 群 G 为系数群的 X 的同调群. 因此以前的同调群 $H_n(X)$ 变成为当 $G=Z$ 的特殊情况, 即 $H_n(X)=H_n(X,Z)$.

实际上 $H_n(X,G)$ 可由 $H_n(X)$ 完全决定, 因此 $H_n(X,G)$ 并不能给出更多的信息. 但是 $H_n(X,G)$ 经常是有用的, 特别当 G 取为一个域的时候.

$H_n(X,G)$ 的定义是纯粹代数的, "将整系数改为 G 中元素为系数" 的思想可用两个群的 **张量积** 的概念来刻划. 因此将首先从抽象的角度来叙述张量积.

定义 5.1 已给 Abel 群 A 和 B, **张量积** $A\otimes B$ 是由以下生成元组和关系组的 Abel 群, 其中 生成元组$\{a\otimes b \mid a\in A, b\in B\}$, 关系组$\{(a_1+a_2)\otimes b_1-a_1\otimes b_1-a_2\otimes b_1$或$a_1\otimes(b_1+b_2)-a_1\otimes b_1-a_1\otimes b_2 \mid a_1,a_2\in A, b_1,b_2\in B\}$.

例 5.2 对任一 Abel 群 G, $G\otimes Z\cong G$.

证: 作对应 $\theta: G\otimes Z\to G$ 为 $\theta(g\otimes n)=ng$, 其中 $g\in G, n\in Z, ng=g+g+\cdots+g$($n$次!). 容易验证, θ 在 $G\otimes Z$ 的关系组成员所取的值为 0, 故 θ 是同态. 容易看出 θ 是满同态, 现在证明 θ 是单同态. 由于

$$\begin{aligned}\theta[\sum_i \lambda_i(g_i\otimes n_i)]=0 \quad &\Longrightarrow \quad \sum_i \lambda_i n_i g_i=0\\ &\Longrightarrow \quad (\sum_i \lambda_i n_i g_i)\otimes 1=0\\ &\Longrightarrow \quad \sum_i(\lambda_i n_i g_i\otimes 1)=0\\ &\Longrightarrow \quad \sum \lambda_i(g_i\otimes n_i)=0\end{aligned}$$

因此 θ 为同构 (并且以后经常将 $G\otimes Z$ 和 G 看作一样的)

例 5.3 已给正整数 p,q, $Z_p\otimes Z_q\cong Z_{(p,q)}$, 其中 (p,q) 为 p,q 的最大公因数.

证：作 $\theta: Z_p \otimes Z_q \to Z_{(p,q)}$ 为

$$\theta(r \otimes s) = rs \pmod{(p,q)}, \quad r \in Z_p, s \in Z_q$$

从而易知 θ 是满同态．设 $\theta[\sum \lambda_i(r_i \otimes s_i)] = 0$，则 $\sum \lambda_i r_i s_i = 0 \pmod{(p,q)}$．注意到数论的有关知识，存在整数 a, b 使

$$\sum \lambda_i r_i s_i = ap + bq$$

从而有

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i(r_i \otimes s_i) &= \sum \lambda_i r_i s_i(1 \otimes 1) \\ &= ap(1 \otimes 1) + bq(1 \otimes 1) \\ &= a(p \otimes 1) + b(1 \otimes q) \\ &= 0 \end{aligned}$$

θ 是单的．因此 θ 为同构．

例 5.4　设 p 为正整数，Q 为有理数域，则 $Z_p \otimes Q = 0$.

证：任 $r \in Z_p, s \in Q, r \otimes s = rp \otimes \frac{s}{p} = 0$.

命题 5.5　同态 $f: A \to A', g: B \to B'$ 导出一个同态

$$f \otimes g: A \otimes B \to A' \otimes B'$$

使当 $f': A' \to A'', g': B' \to B''$ 为另一对同态，有 $(f' \otimes g')(f \otimes g) = f'f \otimes g'g$.

证：定义 $f \otimes g: A \otimes B \to A' \otimes B'$ 为

$$(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b), a \in A, b \in B$$

容易验证 $f \otimes g$ 在 $A \otimes B$ 关系组成员上所取的值为 0，因此 $f \otimes g$ 是同态．$(f' \otimes g')(f \otimes g) = f'f \otimes g'g$ 直接由定义得出．

在将张量积应用到链复形之前，以下两个张量积的规则是必要的．

命题 5.6 (a)$A\otimes B\cong B\otimes A$; (b) 若 $A=\oplus_i A_i, B=\oplus_j B_j$, 则 $A\otimes B\cong\oplus_{i,j}(A_i\otimes B_j)$.

证: (a) 是显然的.

(b) 将 $\oplus_i A_i$ 的元素写作 (a_i), 其中 $a_i\in A_i$. 定义

$$p_i: A_i\to\oplus_i A_i,\qquad q_j: B_j\to\oplus_j B_j$$

$$a_i\mapsto(a_i),\qquad b_j\mapsto(b_j)$$

这两个是内射同态, 再定义

$$\theta: A\otimes B\to\oplus_{i,j}(A_i\otimes B_j),\quad \phi:\oplus_{i,j}(A_i\otimes B_j)\to A\otimes B$$

$$\theta[(a_i)\otimes(b_j)]=(a_i\otimes b_j),\quad \phi((x_{ij}))=\sum(p_i\otimes q_j)x_{ij}$$

$$x_{ij}\in A_i\otimes B_j$$

则 $\phi\theta[(a_i)\otimes(b_j)]=\phi((a_i\otimes b_j))=\sum(p_i\otimes q_j)(a_i\otimes b_j)=\sum p_ia_i\otimes q_jb_j=(a_i)\otimes(b_j)$, 即 $\phi\theta=1$. 另外

$$\theta\phi((a_i\otimes b_j))=\theta[\sum p_ia_i\otimes q_jb_j]=\theta[(a_i)\otimes(b_j)]=(a_i\otimes b_j)$$

因此也有 $\theta\phi=1$, 从而 θ 是同构.

下面我们感兴趣的是将张量积应用到链复形.

命题 5.7 设 $C=\{C_n,\partial_n\}$ 是具有边缘同态 $\partial_n: C_n\to C_{n-1}$ 的链复形, 则 $C\otimes G=\{C_n\otimes G,\partial\otimes 1\}$ 也是链复形, 且若 $f: C\to D$ 为链映射, 则 $f\otimes 1: C\otimes G\to D\otimes G$ 也是链映射.

证: 因为 $(\partial\otimes 1)(\partial\otimes 1)=\partial\partial\otimes 1=0$, 因此 $C\otimes G$ 是链复形. 另外 $(f\otimes 1)(\partial\otimes 1)=f\partial\otimes 1=\partial f\otimes 1=(\partial\otimes 1)(f\otimes 1)$, 因此 $f\otimes 1$ 是链映射.

定义 5.8 设 $S(X,Y)$ 为空间偶 (X,Y) 的奇异链复形, 则 $S(X,Y;G)=S(X,Y)\otimes G$ 也是链复形, 它的同调群

$$H_n(X,Y;G)=H_n(S(X,Y)\otimes G)$$

叫做以 G 为系数群的 (X,Y) 的同调群. 同样的

$$\widetilde{H}_n(X;G)=H_n(\widetilde{S}(X)\otimes G)$$

叫做以 G 为系数群的 X 的约简同调群. 已给映射 $f:(X,Y)\to(X',Y')$, 得到链映射 $f_\#\otimes 1:S(X,Y)\otimes G\to S(X,Y)\otimes G$ 从而导出同调群的同态

$$f_*:H_n(X,Y;G)\to H_n(X',Y';G)$$

若另有映射 $g:(X',Y')\to(X'',Y'')$, 则易证 $(gf)_*=g_*f_*$ 而且 $1_*=1$. 根据定理 2.22.再稍作修改可以得出: 若 $f\simeq f':(X,Y)\to(X',Y')$ 则 $f_*=f'_*$. 由此容易得出 $H_n(X,Y;G)$ 也是伦型不变量.

由例 5.2, $S(X,Y)\otimes Z$ 和 $S(X,Y)$ 可以等同, 因此 $H_n(X,Y;Z)$ 就是以前整系数的同调群 $H_n(X,Y)$. 另外容易验证对于空间偶 (X,Y) 来说, 以下序列

$$0\longrightarrow S(Y)\otimes G\overset{i_\#\otimes 1}{\longrightarrow}S(X)\otimes G\overset{j_\#\otimes 1}{\longrightarrow}S(X,Y)\otimes G\longrightarrow 0$$

是链复形短正合序列, 因此整系数情况下的空间偶 (X,Y) 同调正合序列可推广到一般系数的情况, 如此等等.

一般系数同调群 $H_n(X,Y;G)$ 可由整系数同调群 $H_n(X,Y)$ 所决定. 下面将讨论两者之间的关系, 但我们只限于考虑最有用的两种特殊情况 $G=Q$ 或 Z_p.

命题 5.9 设 C 为链复形而 F 为域, 则链复形 $C\otimes F$ 的同调群 $H(C\otimes F)$ 是域 F 上的向量空间. 更进一步若 $g:C\to D$ 为链映射, 则导出的同调群的同态 $g_*:H(C\otimes F)\to H(D\otimes F)$ 是向量空间之间的线性映射.

证: 先证明 $C\otimes F$ 为 F 上向量空间. 这需要定义 F 对于 $C\otimes F$ 的数乘运算为 $f(c\otimes f')=c\otimes ff'$, 其中 $c\in C, f$ 和 $f'\in F$. 显然这使 $C\otimes F$ 成为 F 上的向量空间. 另外

$$\begin{aligned} f[(\partial\otimes 1)(c\otimes f')] &= f(\partial c\otimes f')=\partial c\otimes ff' \\ &= (\partial\otimes 1)[f(c\otimes f')] \end{aligned}$$

从而 $\partial\otimes 1: C_n\otimes F\to C_{n-1}\otimes F$ 是线性映射. 因此 $H_n(C\otimes F)$ 作为 $C_n\otimes F$ 的向量子空间的商空间仍是向量空间. 类似的论证可说明 $g\otimes 1$ 是线性映射.

推论 5.10 已给空间 (X,Y) 和域 F, 则 $H_n(X,Y;F)$ 是 F 上的向量空间而且若 $g:(X,Y)\to(X',Y')$ 为连续映射, 则 $g_*: H_n(X,Y;F)\to H_n(X',Y',;F')$ 是向量空间之间线性映射.

下面开始讨论以 Q 或 Z_p 为系数群的同调群和整系数同调群之间的关系. 对 Q 的情况, 需要一个引理.

引理 5.11 设 Q 为有理数域, G 为 Abel 群. (a) 若 $g\otimes 1=0\in G\otimes Q$, 则有整数 n 使 $ng=0$. (b) 若 $F\xrightarrow{\alpha}G\xrightarrow{\beta}H$ 为 Abel 群正合序列, 则

$$F\otimes Q\xrightarrow{\alpha\otimes 1}G\otimes Q\xrightarrow{\beta\otimes 1}H\otimes Q$$

也是正合序列.

证: (a) $\{g_\alpha\}$ 为 G 的生成元组, 则 $g=\sum n_\alpha g_\alpha$, 其中 n_α 只有有限个不等于 0. 设 G_0 为上述和式中出现的有限个 g_α 生成的子群, 则 G_0 是有限生成 Abel 群. 根据有限生成 Abel 群的分解定理, 存在同构

$$\theta: G_0\cong\underbrace{Z\oplus\cdots\oplus Z}_{r\text{ 个}}\oplus Z_{p_1{}^{r_1}}\oplus\cdots Z_{p_s{}^{r_s}}$$

设 $\theta(g)=(m_1,\ldots,m_r,n_1,\ldots,n_s)$, 则

$$\begin{aligned}0 &= (\theta\otimes 1)(g\otimes 1)\\ &= (m_1\otimes 1,\ldots,m_r\otimes 1,n_1\otimes 1,\ldots,n_s\otimes 1)\\ &\in Z\otimes Q\oplus\cdots\oplus Z\otimes Q\oplus Z_{p_1{}^{r_1}}\otimes Q\oplus\cdots\oplus Z_{p_s{}^{r_s}}\otimes Q\end{aligned}$$

由例 5.2 和 5.4, $Z\otimes Q\cong Q, Z_{p_i{}^{r_i}}\otimes Q=0$, 因此有 $m_1=\ldots=m_r=0$, 即 $\theta(g)=(0,\ldots,0,n_1,\ldots,n_s)$.

取 $n=p_1^{r_1}\cdots p_s^{r_s}$, 则 $\theta(ng)=(0,\ldots,0,nn_1,\ldots,nn_s)=0$, 从而 $ng=0$.

(b) 由 $F\xrightarrow{\alpha}G\xrightarrow{\beta}H$ 正合, 则 $\beta\alpha=0$. 因此 $(\beta\otimes1)(\alpha\otimes 1)=(\beta\alpha)\otimes1=0, \mathrm{im}(\alpha\otimes1)\subset\ker(\beta\otimes1)$.

设 $\sum_i g_i\otimes q_i\in\ker(\beta\otimes1)$, 即 $\sum_i\beta(g_i)\otimes q_i=0\in H\otimes Q$. 令 m 为这些有理数 q_i 的公分母, 则 mq_i 为整数, 从而有

$$\sum_i\beta(g_i)mq_i\otimes\frac{1}{m}=0$$

或者 $[\sum_i mq_i(\beta(g_i)]\otimes1=0$. 由本引理 (a) 得出, 存在整数 n 使 $\sum_i nmq_i\beta(g_i)=0$. 再由正合性, 存在 $f\in F$ 使 $\alpha(f)=\sum_i nmq_ig_i$. 因此

$$\begin{aligned}\sum_i g_i\otimes q_i &= \sum_i nmq_ig_i\otimes\frac{1}{nm}=\alpha(f)\otimes\frac{1}{nm}\\ &= (\alpha\otimes1)(f\otimes\frac{1}{nm}).\end{aligned}$$

注: 将正合序列对 Q 作张量积后仍然保持正合性, 这是有理数域 Q 的特殊性所决定. 如果对其他的域或 Abel 群作张量积后, 未必能保持正合性. 例如 $0\xrightarrow{\alpha}Z\xrightarrow{\beta}Z$ 是正合的如果 $\beta(m)=2m$, 但是

$$0\xrightarrow{\alpha\otimes1}Z\otimes Z_2\xrightarrow{\beta\otimes1}Z\otimes Z_2$$

就不是正合的. 读者可自行验证.

定理 5.12 设 C 为任意链复形, 则对每个 $n\in Z$

$$H_n(C\otimes Q)\cong H_n(C)\otimes Q$$

证: 由 $0\longrightarrow Z_n(C)\xrightarrow{\alpha}C_n\xrightarrow{\partial}C_{n-1}$ 正合和引理 5.11(b), 得到正合序列 $0\longrightarrow Z_n(C)\otimes Q\xrightarrow{\alpha\otimes1}C_n\otimes Q\xrightarrow{\partial\otimes1}C_{n-1}\otimes Q$. 因此 $Z_n(C\otimes Q)=\ker(\partial\otimes1)=Z_n(C)\otimes Q$.

另外由正合序列 $0 \longrightarrow Z_{n+1}(C) \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} B_n(C) \longrightarrow 0$ 得出正合序列 $0 \longrightarrow Z_{n+1}(C)\otimes Q \longrightarrow C_{n+1}\otimes Q \xrightarrow{\partial\otimes 1} B_n(C)\otimes Q \longrightarrow 0$, 从而有 $B_n(C\otimes Q) = \mathrm{im}(\partial\otimes 1) = B_n(C)\otimes Q$, 并且

$$H_n(C\otimes Q) = Z_n(C\otimes Q)/B_n(C\otimes Q) = Z_n(C)\otimes Q/B_n(C)\otimes Q$$

最后，由正合序列 $0 \longrightarrow B_n(C) \longrightarrow Z_n(C) \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow 0$ 得出正合序列 $0 \longrightarrow B_n(C)\otimes Q \longrightarrow Z_n(C)\otimes Q \longrightarrow H_n(C)\otimes Q \longrightarrow 0$, 因此 $Z_n(C)\otimes Q/B_n(C)\otimes Q \cong H_n(C)\otimes Q$, 定理得证.

推论 5.13 对空间偶 (X,Y), 有理系数同调群 $H_n(X,Y;Q) \cong H_n(X,Y)\otimes Q$. 对单纯复形偶 (K,L) 也有 $H_n(K,L;Q) \cong H_n(K,L)\otimes Q$.

下面讨论 Z_p 系数同调群和整系数同调群之间的关系，同样的我们需要一个引理.

引理 5.14 设 G 为 Abel 群，$\alpha: G \to G$ 是定义为 $\alpha(g) = pg$ 的同态，则有正合序列

$$0 \longrightarrow \ker\alpha \hookrightarrow G \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G\otimes Z_p \longrightarrow 0$$

其中 $\beta(g) = g\otimes 1$.

证：显然 β 是满的，只要证明 $\mathrm{im}\alpha = \ker\beta$. 因为 $\beta\alpha(g) = \beta(pg) = pg\otimes 1 = g\otimes p = 0$, 因此 $\mathrm{im}\alpha \subset \ker\beta$. 另一方面可以定义同态 $\gamma: G\otimes Z_p \to G/\mathrm{im}\alpha$ 为 $\gamma(g\otimes n) =$ 陪集 $[ng]$, 其中 $n \in Z_p$. 这个定义是合理的，因为 $[pg] = 0$, 更进一步，$\gamma\beta: G \to G/\mathrm{im}\alpha$ 恰好是商同态. 因此若 $g \in \ker\beta$, 则 $\gamma\beta(g) = 0 \in G/\mathrm{im}\alpha$, 从而 $g \in \mathrm{im}\alpha$, 序列是正合的.

定义 5.15 上述 $\ker\alpha$ 称为 G 和 Z_p 的 挠积$\mathrm{Tor}(G,Z_p)$.

显然 $\mathrm{Tor}(G,Z_p)$ 是 G 的如下子群：$\{g\in G \mid pg = 0\}$. 因此容易说明 $\mathrm{Tor}(Z,Z_p) = 0$ 而 $\mathrm{Tor}(Z_q,Z_p) = Z_{(p,q)}$, $\mathrm{Tor}(\oplus_{i=1}^r G_i, Z_p) \cong \oplus_{i=1}^r \mathrm{Tor}(G_i,Z_p)$. 这样，对任一有限生成的 Abel 群 G, $\mathrm{Tor}(G,Z_p)$ 都可以计算出来.

定理 5.16(泛系数定理) 设 $C=\{C_n,\partial_n\}$ 为链复形使每个 C_n 为有限生成的自由 Abel 群, p 为任意正整数, 则

$$H_n(C\otimes Z_p)\cong H_n(C)\otimes Z_p\oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C),Z_p)$$

证: 因为 C_n 是有限生成自由 Abel 群, 即 $C_n\cong Z\oplus\cdots\oplus Z$, 因此 $\mathrm{Tor}(C_n,Z_p)=0$, 从而有正合序列 (对每个 n)

$$0\longrightarrow C_n\xrightarrow{\alpha}C_n\xrightarrow{\beta}C_n\otimes Z_p\longrightarrow 0$$

其中 $\alpha(c)=pc,\beta(c)=c\otimes 1$. 由定理 3.3, 存在同调正合序列

$$\cdots\longrightarrow H_n(C)\xrightarrow{\alpha_*}H_n(C)\xrightarrow{\beta_*}H_n(C\otimes Z_p)\xrightarrow{\partial_*}H_{n-1}(C)\xrightarrow{\alpha_*}\cdots$$

并且因此产生短正合序列

$$0\longrightarrow \mathrm{coker}\ \alpha_*\xrightarrow{\beta_*}H_n(C\otimes Z_p)\longrightarrow \ker\ \alpha_*\longrightarrow 0$$

其中 $\mathrm{coker}\ \alpha_*=H_n(C)/\mathrm{im}\ \alpha_*$. 因为 $\alpha_*: H_{n-1}(C)\to H_{n-1}(C)$ 是乘以 p 的同态, 由引理 5.14 可知, $\ker\alpha_*\cong\mathrm{Tor}(H_{n-1}(C),Z_p)$. 同样可知, $\mathrm{coker}\ \alpha_*\cong H_n(C)\otimes Z_p$, 从而以上短正合序列变成

$$0\longrightarrow H_n(C)\otimes Z_p\xrightarrow{\beta_*}H_n(C\otimes Z_p)\longrightarrow \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C),Z_p)\longrightarrow 0$$

而且可以看出 β_* 的对应为 $\beta_*([z]\otimes 1)=[z\otimes 1]$, 对于 $z\in Z_n(C)$.

因为有短正合序列 $0\longrightarrow Z_n(C)\xrightarrow{i}C_n\xrightarrow{\partial}B_{n-1}(C)\longrightarrow 0$, 而自由 Abel 群 C_{n-1} 的子群 $B_{n-1}(C)$ 仍是自由 Abel 群, 因此有同态 $\varphi: B_{n-1}(C)\to C_n$ 使 $\partial\varphi=1_{B_{n-1}(C)}$. 由 §3 习题 1, 存在同态 $\psi: C_n\to Z_n(C)$ 使 $\psi i=1_{Z_n(C)}$. 因此以下合成

$$Z_n(C\otimes Z_p)\longrightarrow C_n\otimes Z_p\xrightarrow{\psi\otimes 1}Z_n(C)\otimes Z_p\longrightarrow H_n(C)\otimes Z_p$$

将 $B_n(C\otimes Z_p)$ 映成 0, 从而可导出同态 $\psi': H_n(C\otimes Z_p)\longrightarrow H_n(C)\otimes Z_p$ 使得 $\psi'\beta_*=1$. 由 §3 习题 1, 以上短正合序列是可裂的, 即

$$H_n(C\otimes Z_p)\cong H_n(C)\otimes Z_p\oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C,Z_p)$$

证毕.

推论 5.17　设 (K,L) 为单纯复形偶, 则对整数 $p\geq 2, n\geq 0$ 有

$$H_n(K,L;Z_p)\cong H_n(K,L)\otimes Z_p\oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(K,L),Z_p)$$

习　题

1. 对任意 Abel 群 A,B,C, 证明: $(A\otimes B)\otimes C\cong A\otimes(B\otimes C)$.

2. 设 $\theta: G\to H$ 为 Abel 群之间的同态, 证明: θ 导出同调群的同态 $\theta_*: H_n(X,G)\to H_n(X,H)$, 使当 $f: X\to Y$ 为映射时有 $\theta_* f_* = f_*\theta_*$.

3. 证明: Abel 群短正合序列 $O\longrightarrow G\xrightarrow{\alpha} H\xrightarrow{\beta} K\longrightarrow O$ 导出同调群长正合序列

$$\cdots\longrightarrow H_n(X,G)\xrightarrow{\alpha_*} H_n(X;H)\xrightarrow{\beta_*} H_n(X;H)\xrightarrow{\theta_*} H_{n-1}(X;G)\longrightarrow\cdots$$

§6　应用: Lefschetz 不动点定理

作为同调群的应用, 本节介绍 Lefschetz 不动点定理. 这是关于多面体自映射的不动点存在定理, 而关于 n 维圆盘 E^n 自映射的 Brouwer 不动点定理只是前者的推论. 下面首先介绍多面体的 Betti 数, 挠系数, Lefschetz 数和 Euler–Poincaré 示性数等伦型不变量.

定义 6.1　单纯复形 K 的整系数同调群 $H_n(K)$ 是有限生成的 Abel 群, 因此 $H_n(K)\cong Z\oplus\cdots\oplus Z\oplus Z_{{p_1}^{t_1}}\oplus\cdots\oplus Z_{{p_m}^{t_m}}$ (共有 r_n 个 Z), 从而其有理系数同调群 $H_n(K,Q)\cong H_n(K)\otimes Q\cong Q\oplus\cdots\oplus Q$ (共有 r_n 个 Q). 正整数 r_n 叫做 K 的 n 维 Betti 数, $p_1^{t_1},\ldots,p_m^{t_m}$ 叫做 K 的 n 维挠系数, 它们都是多面体 $|K|$ 的伦型不变量.

定义 6.2 多面体 $|K|$ 的自映射 $f:|K|\to|K|$ 导出线性变换 $f_*^n: H_n(K,Q)\to H_n(K,Q)$, 它的矩阵是 r_n 阶有理数矩阵

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1r_n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2r_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{r_n1} & q_{r_n2} & \cdots & q_{r_nr_n} \end{pmatrix}$$

其中 r_n 为 K 的 n 维 Betti 数. 该矩阵对角线上各有理数的和叫做 f_*^n 的 迹, 记为 $\mathrm{tr}(f_*^n)=q_{11}+q_{22}+\cdots+q_{r_nr_n}$. f_*^n 的迹的交叉和叫做自映射 $f:|K|\to|K|$ 的 Lefschetz 数, 记为 $L(f)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{tr}(f_*^n)$, 因为 K 维数有限, 这实际上是一个有限和.

定义 6.3 由以上定义可知, 恒等映射 $1_{|K|}:|K|\to|K|$ 的 Lefschetz 数 $L(1_{|K|})=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n r_n$, 即 n 维 Betti 数的交叉和, 这个数叫做 $|K|$ 的 Euler-Poincaré 示性数, 记为 $\chi(|K|)$.

例 6.4 射影平面 RP^2 的同调群为 $H_0(RP^2)=Z, H_1(RP^2)=Z_2$, $H_n(RP^2)=0(n\geq 2)$, 因此 RP^2 的 n 维 Betti 数 $r_n=0(n\geq 2), r_1=0, r_0=1$, 从而 Euler-Poincaré 示性数 $\chi(RP^2)=r_0-r_1+r_2-\cdots=1$.

现在叙述本节的主要定理 —Lefschetz 不动点定理.

定理 6.5 若自映射 $f:|K|\to|K|$ 的 Lefschetz 数 $L(f)\neq 0$, 则 f 至少有一个不动点.

为了证明这个定理, 需要作一些准备.

引理 6.6 自映射 $f:|K|\to|K|$ 导出链映射 (也是线性变换) $f_\#^n: C_n(K)\otimes Q\to C_n(K)\otimes Q$, 则 $L(f)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{tr}(f_\#^n)$.

证: 记 $C_n=C_n(K)\otimes Q, Z_n=Z_n(C(K)\otimes Q), B_n=B_n(C(K)\otimes Q)$, 后两者分别是链复形 $C(K)\otimes Q$ 的 n 维闭链群和边缘群. 另外, 记链映射 $f_\#^n: C_n\to C_n$ 在 Z_n, B_n 上的限制为 $(f_\#^n)': Z_n\to Z_n, (f_\#^n)'': B_n\to B_n$. 另外, $f_\#^n: C_n\to C_n$ 导出线性变换 $\overline{f_\#^n}: C_n/Z_n\to C_n/Z_n$ 和 $f_*^n: Z_n/B_n\to Z_n/B_n$.

后者就是 f 导出的 $H_n(K,Q)$ 到自身的线性变换 f_*^n. 因为向量空间 $C_n \cong Z_n \oplus C_n/Z_n$, 因此由线性代数中的结果得出, $\mathrm{tr}(f_{\#}^n) = \mathrm{tr}((f_{\#}^n)') + \mathrm{tr}(\overline{f_{\#}^n})$. 同样由 $Z_n \cong B_n \oplus Z_n/B_n$ 可得出 $\mathrm{tr}((f_{\#}^n)') = \mathrm{tr}((f_{\#}^n)'') + \mathrm{tr}(f_*^n)$, 从而有

$$\begin{aligned}\sum(-1)^n\mathrm{tr}(f_{\#}^n) &= \sum(-1)^n\mathrm{tr}((f_{\#}^n)'') + \sum(-1)^n\mathrm{tr}(f_*^n)\\ &\quad + \sum(-1)^n\mathrm{tr}(\overline{f_{\#}^n})\end{aligned}$$

但是$\partial\otimes 1$导出同构$\overline{\partial}: C_n/Z_n \to B_{n-1}$, 因此$\mathrm{tr}(\overline{f_{\#}^n}) = \mathrm{tr}((f_{\#}^{n-1})'')$, 从而以上和式的第一项和第三项相互抵消得出 $\sum(-1)^n\mathrm{tr}(f_{\#}^n) = \sum(-1)^n\mathrm{tr}(f_*^n) = L(f)$. 证毕.

如果将以上引理应用到恒等映射 $1_{|K|}: |K| \to |K|$, 可得出 Euler–Poincaré 示性数 $L(1_{|K|}) = \sum(-1)^n\alpha_n$, 其中 α_n 是 K 的 n 维单形的个数. 这就是说, 单纯复形 K 的 n 维单形个数的交叉和是一个伦型不变量, 这是经典的 Euler 定理的推广.

定理 6.5 的证明 用反证法证明. 设 $f: |K| \to |K|$ 没有不动点, 即对任 $x \in |K|$ 有 $f(x) \neq x$, 从而距离 $d(f(x), x) > 0$. 因为 $|K|$ 紧致, 因此下确界 $\inf\{d(f(x), x) | x \in |K|\} = \delta > 0$. 由第二章命题 3.15, 存在正整数 n, 使 K 的 n 次重分的网径 $\mathrm{mesh}K^{(n)} < \frac{\delta}{2}$ 并且由第二章定理 3.16 和命题 3.17, 存在正整数 t 和 $f: |K^{(n)}| \to |K^{(n)}|$ 的单纯逼近 $g: |K^{(n+t)}| \to |K^{(n)}|$, 恒等映射 $1: |K^{(n)}| \to |K^{(n)}|$ 的单纯逼近 $h: |K^{(n+t)}| \to |K^{(n)}|$ 使 $g \simeq f \simeq fh$. 因此有 $g_* = f_*h_*: H_r(K^{(n+t)}, Q) \to H_r(K^{(n)}, Q)$.

类似于定义 3.8, 有重分链映射 $Sd: C_r(K^{(n)}, Q) \to C_r(K^{(n+1)}, Q)$ 使 $h_*(Sd)_*^t = 1: H_r(K^{(n)}, Q) \to H_r(K^{(n)}, Q)$. 因此有 $g_*(Sd)_*^t = f_*: H_r(K^{(n)}, Q) \to H_r(K^{(n)}, Q)$. 下面我们只要证明 f 的 Lefschetz 数 $L(f) = 0$, 即 $\sum(-1)^r\mathrm{tr}(f_*^r) = 0$. 根据引理 6.6, 只要证明对所有的 r 有 $\mathrm{tr}(g_{\#}(Sd)^t) = 0$, 也就是说只要证明, 对每个 r 维单形 $\sigma \in K^{(n)}$, 链 $g_{\#}(Sd)^t(\sigma) = \sum m_i\sigma_i$ 这

个表达式中， σ_i 都不等于 σ. 不然的话，如果有一个 $\sigma_i = \sigma$, 由于链 $(Sd)^t(\sigma)$ 的表达式中每个单形 $\tau \subset \sigma$, 因此至少有这样一个 τ 使 $g(\tau) \subset \sigma$, 从而 $d(x, g(x)) \leq \text{mesh}K^{(n)} < \frac{\delta}{2}$. 另一方面， $d(f(x), g(x)) \leq \text{mesh}K^{(n)} < \frac{\delta}{2}$, 因此 $d(x, f(x)) \leq d(x, g(x)) + d(g(x), f(x)) < \delta$, 与以上的下确界相矛盾. 证毕.

以下的 Brouwer 不动点定理是 Lefschetz 不动点定理的简单推论.

定理 6.7 n 维圆盘 E^n 的任一自映射 $f: E^n \to E^n$ 有不动点.

证：因为 E^n 可缩，因此 $H_q(E^n) = 0 (q > 0)$ 而 $H_0(E^n) = Z$. 因此 $\text{tr}(f_*^q) = 0$(当 $q > 0$) 而 $\text{tr}(f_*^0) = 1$, 从而 $L(f) = 1$, $f: E^n \to E^n$ 有不动点. 证毕.

习　题

1. 设 K 为单纯复形使 $|K|$ 道路连通，且 $H_n(K)$ 对每个 $n > 0$ 都是有限群，则任一自映射 $f: |K| \to |K|$ 有不动点.

2. 如果 n 维复形的 Euler–Poincaré 示性数不等于 0, 则它的任一同伦于恒等映射的自映射有不动点.

3. 设 f 是 n 维球面 S^n 的自映射且 $f(S^n) \neq S^n$, 则 f 有不动点.

4. 当 n 为偶数时， n 维球面 S^n 的自映射或具有不动点，或有一点 a 使 $f(a)$ 是 a 的对径点.

5. 设 n 为偶数，则 n 维射影空间 RP^n 的任一自映射 $f: RP^n \to RP^n$ 有不动点.

参 考 书 目

[1] 江泽涵，《拓扑学引论》，上海科学技术出版社， 1978.

[2] 陈吉象，《代数拓扑基础讲义》，高等教育出版社， 1987.

[3] M.A.Armstrong, 《Basic Topology》, McGrow–Hill, Berkshire, England, 1979. (中译本《基础拓扑学》，孙以丰译，北京大学出版社， 1983.)

[4] F.H.Croom, 《Basic Concepts of Algebraic Topology》, Springer– Verlag, New York, 1978.

[5] M.J.Greenberg, 《Lecture on Algebraic Topology》, Benjamin, New York, 1967.

[6] W.S.Massey, 《Algebraic Topology: An Introduction》, Harcourt, Brace and world, 1967.

[7] C.R.F.Maunder, 《Algebraic Topology》, Cambridge University Press, 1970.

[8] J.R.Munkres, 《Elements of Algebraic Topology》, Addison–Wesley, 1984.

[9] H.Seifert and W.Threlfall, 《Lehrbuch der Topologie》, Teubner, Leipzig, 1934. (中译本《拓扑学》，江泽涵，人民教育出版社， 1959.)

[10] E.H.Spanier, 《Algebraic Topology》, McGraw–Hill, New York, 1966.

[11] S.Willard, 《General Topology》, Addison–Wesley, 1970.

后　记

本书是在为我校数学专业本科生讲授拓扑学课程而编写的讲义的基础上形成的．一般的，本书是作为一学期课程使用的．若总学时为 80 学时，则基本上可以讲完本书内容，若总学时为 60 学时，则可以讲完本书的前三章．由于拓扑学课程一般是安排在学生学习过线性代数和抽象代数知识之后讲授的，因此有关抽象代数的预备知识没有列入本书的内容．

本书在内容的选取上力求抓住主要问题而舍弃一些枝节，以较短篇幅讲述点集拓扑和代数拓扑学最基本而又是最重要的知识，有些延伸的更深入的知识列入习题在习题课中加以解决．本书力求遵循由具体到抽象，再由抽象到具体的认识规律原则，在逻辑叙述概念和结论之前，尽可能说明其直观模型或个例背景，而后又尽可能配备一些例子．根据拓扑学的特点，力求加强直观性．但是由于水平所限，书中的错误或不妥之处在所难免，请读者批评指正．

本书在编写和出版过程中，得到我们数学学院有关领导和一些老师、研究生的关心和支持，在此表示感谢．

编　者

1998 年 3 月

于南开大学

索　引

六 画

七 画

八 画

九 画

十 画

十一画

十二画

十三画

十四画

十八画

《南开大学数学教学丛书》

- 高等代数与解析几何（上、下）
- 拓扑学基础
- 泛函分析
- 实变函数
- 概率论
- 微分方程
- 数学分析

责任编辑：林 鹏

封面设计：卢秋红

